

基础教育振兴行动计划

高中数学学案

(第一版)

安徽师范大学

安徽师范大学

2023 年 10 月

目 录

1. 新教材(人教 2019A 版)高一数学必修第 1 册教学设计.....	1
2. 新教材(人教 2019A 版)高一数学必修第 2 册教学设计.....	93
3. 新教材(人教 2019A 版)高二数学选择性必修 1 教学设计.....	177
4. 新教材(人教 2019A 版)高二数学选择性必修 2 教学设计.....	235
5. 新教材(人教 2019A 版)高二数学选择性必修 3 教学设计.....	275

安徽师范大学

必修第1册第一章：集合与函数概念（学案）

1.1 集合的概念与表示方法

【学习目标】

1. 了解集合的含义，能判断给定元素与集合之间的“属于”关系，掌握两个集合相等的条件，并会判断两个集合是否相等
2. 理解和掌握集合的三要素，体会它们间的“缺一不可”，知道常用数集及其记法
3. 学会用列举法和描述法来表示集合，并会用合适的方法表示一个给定集合
4. 理解描述法中代表元素的含义，能正确区分数集与点集（有序实数对）

【重点】 集合的概念与集合的三要素

【难点】 正确辨别描述法中代表元素的含义

【新课引入】 看下面的一些例子，体会集合的含义：

- (1) 1~10 之间的所有偶数；
- (2) 安师大附中 2021 年 9 月入学的高一学生全体；
- (3) 所有的正方形；
- (4) 到直线 l 的距离等于定长 d 的所有点；
- (5) 方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的所有实数根；
- (6) 地球上的四大洋。

★问题 1：什么是集合？什么叫元素？

一般地，我们把研究的对象统称为 元素 (element)，把 由元素组成的整体 叫做 **集合** (set)，简称 集。

通常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示 集合，用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合中的 元素。

[思考]：上面例 (1) 到例 (6) 都能组成集合吗？它们的元素分别是什么？

★问题 2：“师大附中 2021 年入学的高一高个子男生”能否构成一个集合？为什么？

答：_____，因为_____。

元素与集合之间存在两种关系：如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 集合 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 集合 A ，记作 $a \notin A$ 。

★问题 3：集合中能有两个完全一样的元素吗？

答：_____，一个给定集合中的元素是 互异的。（也就是说，集合中的元素 不重复 出现。）

★问题 4：两个集合可能相等吗？如果相等应满足什么条件？

答：_____，我们就称这两个集合是相等的。（也就是说，集合相等与元素间的 顺序 无关。）

★问题 5：根据刚才的问题 2~4，说说集合中的元素有那些特性？

集合中的元素具有三个特性：_____、_____、_____。

【练习 1】下列各组对象能组成一个集合的是 ()

- ① 某中学高一年级所有聪明的学生；
- ② 在平面直角坐标系中，所有横坐标与纵坐标相等的点；
- ③ 所有不小于 3 的正整数；
- ④ $\sqrt{3}$ 的所有近似值。

A. ①② B. ③④

C. ②③ D. ①③

【练习 2】下列说法正确的是 ()

- 某班中年龄较小的同学组成一个集合
- 集合 $\{1, 2, 3\}$ 与 $\{3, 1, 2\}$ 表示不同的集合
- 参加 2010 年上海世博会所有参展的国家组成一个集合

D. $1, 0.5, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ 组成的集合含有四个元素

★问题 6：请说出以下记号分别表示哪种常用数集？

数学中一些常用数集及其记法

N () N^* 或 N_+ ()
 Z ()
 Q () R ()

【练习三】下列关系中正确的有 _____。（填序号）

- ① $\frac{1}{2} \in R$ ；
- ② $\sqrt{5} \notin Q$ ；
- ③ $|-3| \notin N^*$ ；
- ④ $|- \sqrt{3}| \in Q$ ；
- ⑤ $0 \notin N$ ；
- ⑥ $-5 \in Z$ 。

★问题 7：除了可以用自然语言描述一个集合，还可以用什么方式表示集合呢？

【方法一】列举法

把集合的元素 _____，并用 _____ 表示集合的方法叫做列举法。

☆注：用列举法表示集合时，注意以下三点：

- ① 元素之间用 “,” 隔开；
- ② 元素不重复、无顺序；
- ③ 对含有较多元素的集合，如果构成该集合的元素有明显规律，可用列举法，但必须把元素间的规律显示清楚后方能用省略号。

【例一】用列举法表示下列集合：

(1)36 与 60 的公约数组成的集合;

(2)方程 $(3x-5)(x+2)(x^2+3)=0$ 的根组成的集合;

(3)一次函数 $y=x-1$ 与 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$ 的图象的交点组成的集合.

★问题 8: 能否用列举法表示不等式 $x-7<3$ 的解集吗? 为什么? 不等式 $x-7<3$ 的解集该如何表示呢?

答: _____

【方法二】描述法

用集合所含元素的_____表示集合的方法称为描述法, 具体做法是: 在花括号内先写上表示这个集合元素的_____及_____, 再画一条竖线, 在竖线后写出这个集合中元素所具有的_____.

则不等式 $x-7<3$ 的解集可表示为_____.

☆注: 用描述法表示集合时, 注意以下几点:

- ① 写清楚该集合中元素的代号(字母或用字母表示的元素符号);
- ② 说明该集合中元素的特征;
- ③ 不能出现违背说明的字母;
- ④ 多层描述时, 应当准确使用“或”、“且”、“非”;
- ⑤ 所有描述的内容都要写在集合括号内;
- ⑥ 用于描述法的语句力求简明、确切.

【例二】用描述法表示下列集合:

(1)所有不小于 2, 且不大于 20 的实数组成的集合;

(2)平面直角坐标系内第二象限内的点组成的集合;

(3)使 $y=\frac{\sqrt{2-x}}{x}$ 有意义的实数 x 组成的集合;

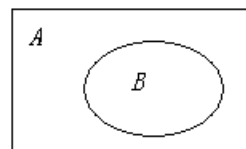
(4)200 以内的正奇数组成的集合;

(5)方程 $x^2-5x-6=0$ 的解组成的集合.

【方法三】Venn 图法

对给定的集合用图形(常见的有圆和矩形)表示, 图形上或图形内的点表示该集合的元素, 图形外的点表示集合外的元素, 这种表示集合的方法叫_____, 或称_____.

如:



★问题 9: 下面三个集合: $A=\{x|y=x^2+1\}$,

$$B=\{y|y=x^2+1\},$$

$$C=\{(x,y)|y=x^2+1\}$$

(1)它们是不是相同的集合?

(2)它们各自的含义是什么?

答: 集合 A 表示_____;

集合 B 表示_____;

集合 C 表示_____.

【例三】判断正误

(1)方程组 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解集是 $\{2, 1\}$ ()

(2)方程 $x^2+x-6=0$ 的解集是 $\{(-3, 2)\}$... ()

(3)方程 $\sqrt{2x-1}+|3y+3|=0$ 的解集是 $\{(x,y)|x=\frac{1}{2} \text{ 或 } y=-1\}$ ()

(4)集合 $M=\{y|y=x^2+1, x \in \mathbf{R}\}$ 与集合 $P=\{t|t=m^2+1, m \in \mathbf{R}\}$ 表示同一集合 ()

【例四】已知集合 $A=\{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$,

若 $1 \in A$, 求实数 a 的值.

1.2 集合间的基本关系

【学习目标】

1. 理解子集、真子集的概念，掌握其记法和 Venn 图，会判断两个集合之间的包含关系
2. 会用子集的观点来解释两个集合相等
3. 了解空集的意义，并理解空集是任何集合的子集

【重点】子集、真子集的包含关系的运用

【难点】对子集关系时空集情况的考虑

【问题引入】

实数之间有相等的关系，也有大小关系，如 $5=5$ ， $5<7$ ， $5>3$ 等等，那么集合之间除了相等还有其他什么关系吗？

先看下面三个例子：

$$(1) A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

$$(2) A = \{x | x \text{ 为师大附中高一(1)班的学生}\},$$

$$B = \{x | x \text{ 为师大附中高一年级的学生}\};$$

$$(3) A = \{x | x \text{ 为正方形}\}, B = \{x | x \text{ 为平行四边形}\}.$$

★问题 1：你能发现上面的每个例子中集合 A 的元素与集合 B 的元素之间有什么关系吗？

答：_____

一般地，对于两个集合 A, B ，如果集合 A 中_____一个元素都是集合 B 的元素，就说这两个集合有_____关系，称_____为_____的子集，记作_____（或_____）。

特别地：任何一个集合是它自身的子集，记作 $A \subseteq A$ 。

★问题 2：若 $A \subseteq B$ ，你能用 Venn 图表示集合 A 与 B 之间的关系吗？

★问题 3：你能用数学符号语言刻画 $A \subseteq B$ 吗？

答：若_____，记作 $A \subseteq B$ 。

如果集合 $A \subseteq B$ ，但存在元素_____，且_____，称集合 A 是集合 B 的真子集，记作_____（或_____）。

把_____的集合叫做空集，记作_____。

【思考 1】：真子集用 Venn 图该如何表示？

★问题 4：空集是其他集合的子集吗？空集是其他集合的真子集吗？

空集是_____的子集，即对任意集合 A ，有_____；

空集是任何_____的真子集，即对任意集合 $A \neq \emptyset$ ，有_____。

【思考 2】：空集是它自身的子集吗？

【思考 3】 写出集合 $\{1, 2, 3\}$ 的所有子集。

答：_____

【结论】：集合 A 中有 n 个元素，则 A 的所有子集个数有_____个，真子集的个数有_____个。

★问题 5：类比数的关系“若 $a \leq b, b \leq c$ ，则 $a \leq c$ ”，那么子集是否也有类似的关系？

子集具有_____性，即“若 $A \subseteq B, B \subseteq C$ ，则_____。”

注：另外，集合的真子集关系与相等关系也具备传递性。

【思考 4】你能举例说明 $\in$ 与 $\subseteq$ ， $\subsetneq$ 的区别吗？

【练习 1】 下列八种关系中正确的是_____。

- ① $a \subseteq \{a\}$; ② $\emptyset \subsetneq a$; ③ $\{a\} \in \{a, b\}$;
 ④ $\{a\} \subseteq \{a\}$; ⑤ $\emptyset \in \{a, b\}$; ⑥ $a \in \{a, b\}$;
 ⑦ $\{(a, b)\} = \{(b, a)\}$; ⑧ $\{(x, y) \mid \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}\} = \{(1, 2)\}$.

【练习 2】用适当的符号填空:

- (1) $0 \underline{\hspace{1cm}} \{x \mid x^2 = x\}$; (2) $\emptyset \underline{\hspace{1cm}} \{x \mid x^2 = x\}$;
 (3) $\{0\} \underline{\hspace{1cm}} \{x \mid x^2 = x\}$; (4) $\{0\} \underline{\hspace{1cm}} \emptyset$.

【练习 3】在下列各式中:

- ① $0 \in \emptyset$; ② $0 \in \{0\}$; ③ $\emptyset \in \{0\}$;
 ④ $\emptyset = \{0\}$; ⑤ $\emptyset \subsetneq \{0\}$; ⑥ $\{0\} \in \{0, 1\}$;
 ⑦ $\{(0, 0)\} = \{0\}$; ⑧ $0 \in \{(0, 1)\}$.

其中正确的命题是: _____.

★问题 6: 你能从子集的观点来解释集合相等的概念吗?

若集合 _____, 且 _____, 则 $A = B$.

【例一】(1) 满足 $\{a, b\} \subseteq A \subseteq \{a, b, c, d, e\}$ 的集合 A 的个数是()

- A. 2 B. 6
 C. 7 D. 8

(2) 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B = \{3, m^2\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m = \underline{\hspace{1cm}}$.

(3) 已知集合 $A = \{-1, 1\}$, $B = \{x \mid ax + 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 则实数 a 的所有可能取值的集合为()

- A. $\{-1\}$ B. $\{1\}$
 C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

【例二】设集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的范围.

【例三】设集合 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \mid m+1 \leq x \leq 2m-2\}$.

- (1) 当 $x \in \mathbf{Z}$ 时, 则 A 的非空真子集个数为 _____ 个;
 (2) 若 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

【例四】已知集合 $A = \{x \mid x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\}$,

$$B = \{x \mid x = \frac{n}{2} - \frac{1}{3}, n \in \mathbf{Z}\},$$

$$C = \{x \mid x = \frac{p}{2} + \frac{1}{6}, p \in \mathbf{Z}\}.$$

试探讨 A 、 B 、 C 之间的关系.

(提示: 枚举法、统一形式法)

1.3.1 集合的基本运算：并与交

【学习目标】

1. 理解并集、交集的概念，并能借助 Venn 图帮助掌握这些运算规律，会求给出集合的并集与交集

2. 会用文字、符号、图形语言描述概念，理解并掌握并集与交集的运算性质，能根据性质解决相关的问题

【重点】 并集、交集运算的概念和性质

【难点】 并集、交集运算性质的灵活运用

【问题引入】

我们知道，实数之间加法运算，那么集合之间是否也可以“相加”呢？

观察下列两个例子：

$$(1) A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$(2) A = \{x | x \text{ 是有理数}\}, B = \{x | x \text{ 是无理数}\},$$

$$C = \{x | x \text{ 是实数}\}.$$

★问题 1：你能说出以上两例中集合 C 与集合 A 、 B 之间的关系吗？

答：_____

一般地，由所有_____所组成的集合，叫做 A 与 B 的并集，记作_____.

$$\text{即： } A \cup B = \{x | \quad\quad\quad\}$$

★问题 2：你能用 Venn 图来描述并集运算吗？

★问题 3：根据并集运算的法则，能填写出下列并集运算的性质吗？

$$(1) A \cup B = B \cup A;$$

$$(2) A \cup A = \quad\quad\quad;$$

$$(3) A \cup \emptyset = \quad\quad\quad;$$

$$(4) A \cup B \supseteq A, A \cup B \supseteq B;$$

$$(5) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = \quad\quad\quad.$$

再观察下列两个例子：

$$(3) A = \{1, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6, 8, 9\}, C = \{4\};$$

$$(4) A = \{x | x \text{ 是在校女同学}\}, B = \{x | x \text{ 是在校高一同学}\}, C = \{x | x \text{ 是在校高一女同学}\}$$

★问题 4：你能说出以上两例中集合 C 与集合 A 、 B 之间的关系吗？

答：_____

一般地，由所有_____所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作_____.

$$\text{即： } A \cap B = \{x | \quad\quad\quad\}$$

★问题 5：你能用 Venn 图来描述交集运算吗？

★问题 6：根据交集运算的法则，能填写出下列交集运算的性质吗？

$$(1) A \cap B = \quad\quad\quad;$$

$$(2) A \cap A = \quad\quad\quad;$$

$$(3) A \cap \emptyset = \quad\quad\quad;$$

$$(4) A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B;$$

$$(5) A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = \quad\quad\quad.$$

【练习一】填空：

$$(1) \text{ 已知集合 } A = \{0, 2, 4\}, B = \{0, 1, 2, 3, 5\}, \text{ 则 } A \cup B = \quad\quad\quad. A \cap B = \quad\quad\quad.$$

$$(2) \text{ 若集合 } A = \{x | x > -1\}, B = \{x | -2 < x < 2\}, \text{ 则 } A \cup B = \quad\quad\quad.$$

$$(3) \text{ 已知 } A = \{(x, y) | 4x + y = 6\}, B = \{(x, y) | 3x + 2y = 7\}, \text{ 则 } A \cap B = \quad\quad\quad.$$

【例一】(1) 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{y | y = 2x - 1, x \in A\}$, 则 $A \cap B$ 等于()

A. {1,3}

B. {2,4}

C. {2,4,5,7}

D. {1,2,3,4,5,7}

(2) 已知集合 $M = \{x | -1 \leq x < 2\}$,
 $N = \{x | x - a \leq 0\}$, 若 $M \cap N = \emptyset$, 则 a 的取值范围是_____.

(3) 设集合 $M = \{x | -2 < x < 5\}$, $N = \{x | 2 - t < x < 2t + 1\}$,
 $t \in \mathbf{R}$, 若 $M \cup N = M$, 则实数 t 的取值范围为_____.

【例二】 设集合 $A = \{a^2, a+1, -3\}$, $B = \{a-3, 2a-1, a^2+1\}$, $A \cap B = \{-3\}$, 求实数 a 的值.

【例三】 设 $A = \{x | x^2 - 2x = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 2ax + a^2 - a = 0\}$.

①若 $A \cap B = B$, 求 a 的取值范围;

②若 $A \cup B = B$, 求 a 的取值.

【例四】 已知集合 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$,
 $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$.

(1) 若 $A \cup B = A \cap B$, 求 a 的值.

(2) 若 $A \cap B \neq \emptyset$ 且 $A \cap C = \emptyset$, 求实数 a 的值.

【例五】 已知 $A = \{x | x^2 + 2x + m = 0\}$,
 $B = \{x \in \mathbf{R} | x > 0\}$.

(1) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围.

1.3.2 集合的基本运算：全集与补集

【学习目标】

1. 理解全集和补集的概念，掌握其记法和 Venn 图，会求给定集合的补集
2. 学会用补集的思想解决相关问题，体会“正难则反”的思维方式
3. 能用 Venn 图表达集合间的运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用

【重点】 补集的概念和求解

【难点】 “正难则反”的解题策略

【问题引入】

(1) $\{x \in \mathbf{Q} \mid (x-2)(x^2-3)=0\} = \{\rule{1cm}{0.4pt}\}$,

$\{x \in \mathbf{R} \mid (x-2)(x^2-3)=0\} = \{\rule{1cm}{0.4pt}\}.$

(2) 若集合 $A = \{x \mid 0 < x < 2, x \in \mathbf{Z}\}$,

$B = \{x \mid 0 < x < 2, x \in \mathbf{R}\}$, 则集合 A 、 B 相等吗?

★问题 1: 回答上面两个问题，并思考，这两个问题说明了什么?

一般地，如果一个集合含有我们研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为_____，通常记作_____.

☆注：通常也把给定的集合作为全集.

对于一个集合 A ，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的_____，记作_____，即
_____ = $\{\rule{1cm}{0.4pt}\}$

★问题 2: 画出补集的 Venn 图示，体会用 Venn 图表示集合运算有什么好处?

★问题 3: 对于补集运算，我们能得到哪些性质?

补集的性质 (一):

- (1) $A \cup (\complement_U A) = \rule{1cm}{0.4pt}$, $A \cap (\complement_U A) = \rule{1cm}{0.4pt}$;
- (2) $\complement_U U = \rule{1cm}{0.4pt}$, $\complement_U \emptyset = \rule{1cm}{0.4pt}$;
- (3) $\complement_U (\complement_U A) = \rule{1cm}{0.4pt}$;

★问题 4: 并集、交集、补集之间有什么样的关系?

并集、交集、补集之间的关系	探究： $\complement_U (A \cup B) = ?$	探究： $\complement_U (A \cap B) = ?$
	结论：	结论：

补集的性质 (二):

(4) $\complement_U (A \cup B) = \rule{1cm}{0.4pt}$, $\complement_U (A \cap B) = \rule{1cm}{0.4pt}$;

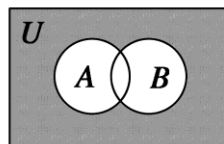
(5) 若 $A \subseteq B$, 则 $A \cap (\complement_U B) = \rule{1cm}{0.4pt}$; 反之, 若 $A \cap (\complement_U B) = \rule{1cm}{0.4pt}$, 则有_____.

【练习一】(1) 已知集合 $M = \{\text{直线}\}$, $N = \{\text{圆}\}$, 则 $M \cap N$ 的元素的个数为 ()

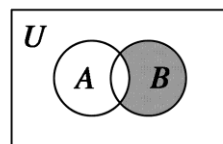
A. 0 个 B. 1 个 C. 2 个 D. 不确定

(2) 若 $U = \{1, 2\}$, $A = \{x \mid x^2 + px + q = 0\}$, $\complement_U A = \{1\}$, 则 $p + q = \rule{1cm}{0.4pt}$.

(3) 设全集为 U , 用集合 A , B 的交集、并集、补集符号表示图中的阴影部分.



(1) _____



(2) _____

【例一】(1) 已知全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{1, 6\}$, $A \cap (\complement_U B) = \{2, 3\}$, $A \cap B = \{4\}$, 则 $A = \rule{1cm}{0.4pt}$, $B = \rule{1cm}{0.4pt}$, $\complement_U (A \cup B) = \rule{1cm}{0.4pt}$.

(2) 已知全集 $U = \{x \mid x \leq 5\}$, 集合 $A = \{x \mid -3 \leq x < 5\}$, 则 $\complement_U A = \rule{1cm}{0.4pt}$.

(3) 已知全集 $U = \{x | x \leq 4\}$, 集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$, $B = \{x | -3 \leq x \leq 2\}$, 求 $A \cap B$, $(\complement_U A) \cup B$, $A \cap (\complement_U B)$.

【例二】设全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{|2a - 1|, 2\}$, $\complement_U A = \{5\}$, 求实数 a 的值.

【例三】已知全集 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | a + 1 \leq x \leq 2a - 1\}$, 且 $A \subseteq \complement_U B$, 求实数 a 的取值范围.

【例四】已知集合 $A = \{x | x^2 - 4mx + 2m + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x < 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $A \cap B \neq \emptyset$, 求实数 m 的取值范围. (提示: 可运用补集思想, “正难则反”)

【变式一】已知集合 $A = \{y | y > a^2 + 1 \text{ 或 } y < a\}$, $B = \{y | 2 \leq y \leq 4\}$, 若 $\text{Card}(A \cap B) \neq 0$, 求实数 a 的取值范围.

【变式二】若集合 $A = \{x | ax^2 + 3x + 2 = 0\}$ 中至多有 1 个元素, 则实数 a 的取值范围为_____.

【例五】已知实数 a 使三个一元二次方程 $x^2 - x + a = 0$, $x^2 - 2x + a = 0$, $x^2 - 4x + 2a = 0$, 至少有一个方程有解, 你能用什么简便方法得出 a 的取值范围吗?

1.4 充分条件与必要条件

【学习目标】

- 初步理解充分条件、必要条件、充要条件三个概念，并能从逻辑关系和集合间的关系上进行理解
- 了解命题A与命题B的条件关系对应的四类情况，会判断两命题的条件关系属充分不必要条件、必要不充分条件、充要条件、既不充分又不必要条件中的哪一种

【重点】充分条件、必要条件、充要条件的概念与判断

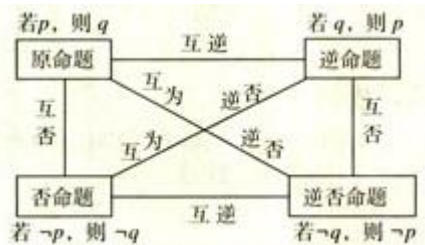
【难点】理解必要条件的不充分条件的区别

【复习引入】

★问题1：什么是命题？四种命题的真假性有联系吗？

1、用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做命题。其中判断为真的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做假命题。
一般命题都可以写成：“若 p ，则 q ”的形式。

2、四种命题间的关系：



注：(1) 两个命题为互逆命题或互否命题时，它们的真假性没有关系；

(2) 两个命题互为逆否命题时，他们有相同的真假性，即互为逆否的两个命题等价。

(3) 由于逆命题和否命题也是互为逆否命题，因此一个命题的逆命题与否命题的真假性也是相同。

【练习1】根据下列命题，在表格中填写它们及其另几种命题的真假

(1) 若平行四边形的对角线互相垂直，则这个平行四边形是菱形；

(2) 若平面内两条直线 a 和 b 均垂直于同一直线 l ，则 $a \parallel b$ 。

(3) 若两个三角形的周长相等，则这两个三角形全等；

(4) 若 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ，则 $x = 3$ ；

序号	原命题	逆命题	否命题	逆否命题
(1)				
(2)				
(3)				
(4)				

★问题2：充分条件和必要条件有何联系？

一般地，“若 p ，则 q ”为真命题，

即 $p \Rightarrow q$ ，则说： p 是 q 的充分条件， q

是 p 的必要条件。

(★注：此时，如果 q 不成立，则 p 一定不成立，所以 q 对于 p 成立而言是必要的)。

[思考]若 p 是 q 的必要条件，则“ $\underline{\hspace{1cm}} \Rightarrow \underline{\hspace{1cm}}$ ”。

【练习2】：下列“若 p ，则 q ”形式的命题中，哪些命题中的 p 是 q 的充分条件？哪些命题中的 q 是 p 的必要条件？

(1) $p: a = b$, $q: ac = bc$;

(2) 若 x 为无理数，则 x^2 为无理数；

(3) 若 $a > b$ ，则 $ac > bc$ ；

(4) $p: b = 0$, q : 函数 $f(x) = x^2 + bx + c$ 是偶函数 (关于 y 轴对称)

通常我们又称：

若 $p \Rightarrow q$ ，且 $q \not\Rightarrow p$ ，则称 p 是 q 的充分不必要条件；

若 $p \not\Rightarrow q$ ，且 $q \Rightarrow p$ ，则称 p 是 q 的必要不充分条件；

若 $p \not\Rightarrow q$ ，且 $q \not\Rightarrow p$ ，则称 p 是 q 的既不充分也不必要条件；

如“ $x > 1$ ”是“ $x^2 > 1$ ”的充分不必要条件，“ $\angle A$ 是锐角”是“ $\triangle ABC$ 为锐角三角形”的必要不充分条件，

“ $a = b$ ”是“ $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$ ”的既不充分也不必要条件。

★问题3：充要条件如何定义？

如果既有 $p \Rightarrow q$ ，又有 $q \Rightarrow p$ ，则可以记作

$p \Leftrightarrow q$ ，这时称 p 是 q 的充要条件，简称充要。

当 p 是 q 的充要条件时，根据对称性， q 也同时是 p 的充要条件，符号“ $\Leftrightarrow$ ”叫做充要符号。

【练习3】：下列各题中哪些 p 是 q 的充要条件？

(1) $p: xy > 0$, $q: x > 0, y > 0$;

(2) $p: ab \neq 0, q: a \neq 0$ 或 $b \neq 0$;

(3) $p: a > b > 0, q: \sqrt{a} > \sqrt{b}$;

(4) $p: a > 1, q: \text{不等式 } ax^2 + 2x + 1 > 0 \text{ 恒成立.}$

★问题 4: 对于两个命题, 有时给定 $p \Rightarrow q$, 有时给定 $p \Leftarrow q$ 或给定 $q \Leftarrow p$, 当命题前后顺序、箭头方向变化的时候, 如何准确的判断到底谁是谁的哪种关系呢?

若 $p \Rightarrow q$: p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件

即: 前者是后者的_____条件,

后者是前者的_____条件.

【例一】若 $x, y \in \mathbb{R}$, 则“ $x > 1$ 或 $y > 2$ ”是“ $x + y > 3$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【例二】若不等式 $-1 < x - m < 1$ 成立的一个充分不必要条件是 $\frac{1}{2} < x < 1$, 则实数 m 的取值范围是_____.

点拨: 常用结论

1. 充要条件的两个结论:

(1) 若 p 是 q 的充分不必要条件, q 是 r 的充分不必要条件, 则 p 是 r 的充分不必要条件;

(2) 若 p 是 q 的充分不必要条件, 则 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件.

2. 充分、必要条件与集合的关系

p 成立的对象构成的集合为 A , q 成立的对象构成的集合为 B	
p 是 q 的充分条件	$A \subseteq B$
p 是 q 的必要条件	$B \subseteq A$
p 是 q 的充分不必要条件	$A \subsetneq B$
p 是 q 的必要不充分条件	$B \subsetneq A$
p 是 q 的充要条件	$A = B$

【例三】(1) 设集合

$$A = \left\{ x \mid \frac{x}{x-1} < 0 \right\}, B = \{ x \mid 0 < x < 3 \}, \text{ 那么“} m \in A \text{”}$$

是“ $m \in B$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

(2) 已知“ $p: (x-m)^2 > 3(x-m)$ ”是“ $q: x^2 + 3x - 4 < 0$ ”成立的必要不充分条件, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $m > 1$ 或 $m < -7$ B. $m \geq 1$ 或 $m \leq -7$
C. $-7 < m < 1$ D. $-7 \leq m \leq 1$

【例四】已知 $P = \{ x \mid x^2 - 8x - 20 \leq 0 \}, S = \{ x \mid |x-1| \leq m \}$.

(1) 是否存在实数 m , 使 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的充要条件, 若存在, 求出 m 的范围;

(2) 是否存在实数 m , 使 $x \in P$ 是 $x \in S$ 的必要条件, 若存在, 求出 m 的范围.

1.5 全称量词和存在量词

【学习目标】

1. 了解全称量词与存在量词的含义及其符号表示，会判断一个全称量词命题（存在量词命题）的真假
2. 掌握全称量词命题与存在量词命题的否定
3. 学会用“找反例”的方法判定一个全称量词命题是假命题或一个存在量词命题是真命题

【重点】全称量词命题与存在量词命题的否定及判断真假

【难点】如何找到适当的“反例”来否定一个全称量词命题或肯定一个存在量词命题

【情境引入】理发师的悖论

先来看一个理发师遇到的困扰：某村只有一个理发师，且该村的人都需要理发，理发师约定“我给且只给村中一切自己不给自己理发的人理发”，试问：理发师的头发谁来理呢？

在我们日常生活与数学中经常会遇到含“对一切、所有、全部、存在、至少有一个”等这些词的命题，我们该如何去理解这些命题呢？含这些词的命题的否定又如何表达呢？带着这些问题走进本节课吧。

★问题 1：下列语句是命题吗？（1）与（3），（2）与（4）之间有什么关系？

- （1） $x > 3$ ；
- （2） $2k+1$ 是整数；
- （3）对所有的 $x \in R$ ，都有 $x > 3$ ；
- （4）对任意一个 $k \in Z$ ， $2k+1$ 是整数。

答：上面四个语句中是命题的有_____；
（3）与（1）、（4）与（2）的关系为_____。

命题中的“对所有”、“任意一个”等短语叫做_____，用符号“_____”表示，含有全称量词的命题，叫做_____。

☆注：常见的全称量词还有“一切”、“每一个”、“任给”、“所有的”等。

如：“所有实数的绝对值都是非负数”、“对任意 $x \in R$ ， $x^2 + 2x + 3 > 0$ 恒成立”都是**全称量词命题**。

通常，将含有变量 x 的语句用 $p(x), q(x), r(x), \dots$ 表示，变量 x 的取值范围用 M 表示，

则，全称量词命题“对 M 中的任意一个 x ，有 $p(x)$ 成立”可用符号简记为：_____

读作：“对任意 x 属于 M ，有 $p(x)$ 成立。”

【练习 1】：判断下列全称量词命题的真假：

- （1）所有的素数都是奇数；
- （2） $\forall x \in R, x^2 + 1 \geq 0$ ；

（3）对每一个无理数 x ， x^2 也是无理数。

★问题 2：再看看下列语句是命题吗？（1）与（3），（2）与（4）之间又有什么关系？

- （1） $2x+1=3$ ；
- （2） x 能被 2 和 3 整除；
- （3）存在一个 $x_0 \in R$ ，使 $2x_0+1=3$ ；
- （4）至少有一个 $x_0 \in Z$ ， x_0 能被 2 和 3 整除。

答：上面四个语句中是命题的有_____；
（3）与（1）、（4）与（2）的关系为_____。

命题中的“存在一个”、“至少有一个”等短语叫做_____，用符号“_____”表示，含有存在量词的命题，叫做_____。

☆注：常见的存在量词还有“有些”、“有一个”、“对某个”、“有的”等。

如：“有些菱形是正方形”、“有一个素数不是奇数”都是**存在量词命题**。

存在量词命题“存在 M 中的元素 x_0 ，使得 $p(x_0)$ 成立”可用符号简记为：_____

读作：“存在 M 中的元素 x_0 ，使得 $p(x_0)$ 成立。”

【练习 2】：判断下列存在量词命题的真假：

- （1）至少有一个实数 x_0 ，使 $x_0^2 + 2x_0 + 3 = 0$ ；
- （2）存在两个相交平面垂直于同一条直线；
- （3）有些三角形不是等腰三角形。

★问题 3：如何判断一个全称量词命题或存在量词命题的真假呢？

【练习 3】：用符号“ $\forall$ ”“ $\exists$ ”表示下列命题，并判断其真假：

- （1）过平面内两点有且只有一条直线；

改写为：_____

- （2）存在一个数既是偶数又是负数。

改写为：_____

☆思考：命题中只要出现“存在”就是存在量词命题吗？如“任何一个三角形都存在外接圆”、“过两平行线有且只有一个平面”分别是什么命题呢？

★问题 4：如何判断一个命题是否为全称量词命题或存在量词命题呢？如何书写它们的否定？

【探究】先判断下列命题是全称量词命题还是存在量词命题，并写出它们的否定形式：

- （1）任何一个平行四边形的对边都平行；（_____ 命题）

否定为: _____

(2) 可以被 5 整除的整数, 末位是 0; (_____ 命题)

否定为: _____

(3) $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 方程 $ax=b$ 都有唯一解; (_____ 命题)

否定为: _____

(4) 有些分数不是有理数; (_____ 命题)

否定为: _____

(5) 存在一个四边形有外接圆; (_____ 命题)

否定为: _____

(6) 存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, $x_0^2 - x_0 + \frac{1}{4} < 0$. (_____ 命题)

否定为: _____

★问题 5: 你能发现含有一个全称量词、存在量词的命题与它们的否定在形式上的变化规律吗?

全称量词命题的否定的:

若全称量词命题 $p: \forall x \in M, p(x)$.则它的否定 $\neg p$ 为 _____.

☆注: 全称量词命题的否定是 _____ 命题.

存在量词命题的否定的:

若存在量词命题 $p: \exists x_0 \in M, p(x_0)$.则它的否定 $\neg p$ 为 _____.

☆注: 存在量词命题的否定是 _____ 命题.

【例一】(1) 命题“对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ ”

的否定是(_____)

A. 不存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \leq 0$ B. 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 \geq 0$ C. 对任意的 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$ D. 存在 $x \in \mathbf{R}$, $x^3 - x^2 + 1 > 0$ (2) 命题 $p: \forall a \geq 0$, 关于 x 的方程 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有实数解, 则 $\neg p$ 为 _____(3) (天津卷) 命题“存在 $x_0 \in \mathbf{R}$, $2^{x_0} \leq 0$ ”的否定是 _____.(4) 命题“不存在实数 x , $x^2 + 1 < 2x$ ”的否定是 _____.【例二】若命题 $p: \forall a, b \in \mathbf{R}$, 方程 $ax + b = 2$ 恰有一解, 则 $\neg p$: _____.

【例三】对下列命题的否定说法错误的是(_____)

A. p : 能被 2 整除的数是偶数; $\neg p$: 存在一个能被 2 整除的数不是偶数B. p : 有些矩形是正方形; $\neg p$: 所有的矩形都不是正方形C. p : 有的三角形为正三角形; $\neg p$: 所有的三角形不都是正三角形D. $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 2 \leq 0$; $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + x + 2 > 0$

【点评】: 全称量词命题与存在量词命题的否定, 其中量词的变化有着一种固定的模式, 如下表所示:

原语句	是	都是	$>$	至少有一个	至多有一个	对任意 $x \in A$, 使 $P(x)$ 真
否定形式	不是	不都是	$\leq$	一个也没有	至少有两个	存在 $x \in A$, 使 $P(x)$ 假

【例四】(1) 命题“ $\forall x \in \mathbf{R}, ax^2 + 4ax + 3 > 0$ ”为真, 则实数 a 的范围是 _____(2) 已知命题 $p: \exists m \in \{m | -1 \leq m \leq 1\}$, $a^2 - 5a + 3 < m + 2$, 若 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 _____.

必修第1册第二章：一元二次函数、方程和不等式

2.1 等式的性质与不等式的性质

【学习目标】

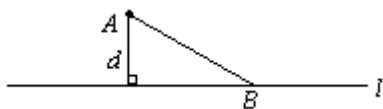
1. 经历不等式性质的推导过程，理解并掌握不等式的八个基本性质，能运用不等式的性质比较数的大小
2. 进一步熟练运用比较两个数大小常用方法

【重点】 不等式的八个基本性质及其应用、等式与不等式的共性与差异

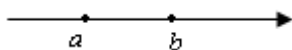
【难点】 灵活利用不等式的性质比较大小

【情景引入】用不等关系表示下列问题：

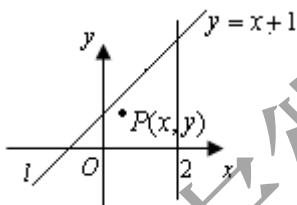
★问题 1：如图，点 A 与直线 l 的距离为 d ，点 A 与直线上任意一点 B 的距离为 $|AB|$ ，则 d _____ $|AB|$ ；



★问题 2：如图，数轴上不同的点 A 与点 B 分别表示两个不同的实数 a 与 b ，则 a _____ b ；



★问题 3：如图，直线 l 的解析式为 $y = x + 1$ ，若点 P (x, y) 在直线 l 的下方，则 x 与 y 满足不等关系为：_____；



★问题 4：如(问题 3)图，若点 P (x, y) 在直线 $y = x + 1$ 和直线 $x = 2$ 及两坐标轴围成的四边形内部（包括边界），则 x 与 y 满足不等关系为：

{ _____

_____ }

含有不等号_____的式子叫不等式。

【解读】1. $a \geq b$ 表示_____或_____；

2. 在 $a = b, a > b, a < b$ ($a, b \in R$) 三种关系中，有且只有一种关系成立；

3. 若 $a, b \in R$ ，则_____ $\Leftrightarrow a > b$ ，

_____ $\Leftrightarrow a < b$ ，这种方法可以用来比较两数的大小关系，叫做_____。

常用不等关系表示：

文字语言	大于	小于	大于等于	小于等于	至多	至少	不少于	不多于
数学语言	$>$	$<$						

【探究：不等式的基本性质】

★问题 5：等式两边同时加上（减去）、乘上（除以）同一个（非 0）实数，等号仍然成立，不等式中也有类似的性质吗？探索并证明下列不等式的性质：

不等式的性质：

性质 1: $a > b \Leftrightarrow b$ _____ a .

性质 2: $a > b, b > c \Rightarrow a$ _____ c .

性质 3: $a > b \Leftrightarrow a + c$ _____ $b + c$.

性质 4: (1) $a > b, c > 0 \Leftrightarrow ac$ _____ bc ;

(2) $a > b, c < 0 \Leftrightarrow ac$ _____ bc .

性质 4 证明：

不等式的性质：

性质 5: $a > b, c > d \Rightarrow a + c$ _____ $b + d$.

性质 6: $a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac$ _____ bd .

性质 5 证明：

性质 6 证明：（★问题 6：直接作差能比较大小吗？应该怎么办？有其他方法吗？）

不等式的性质：性质 7: (1) $a > b > 0 \Rightarrow a^n \underline{\hspace{1cm}} b^n (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$;(2) $a > b > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{a} \underline{\hspace{1cm}} \sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$.性质 8: $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.**★问题 7: 请说明性质 7、8 的推导思路?**

性质 7、8 证明:

[思考]: 已知 $a > b, c > d$, 证明: $a - d > b - c$.

注意: 其他重要结论:

(1) $a > b, c > d \Rightarrow a - d > b - c$;(2) $a + c > b \Rightarrow a > b - c$;(3) $a > b > 0, 0 < c < d \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.**★问题 8: 分别用一句话概括每个性质和结论的特点?****【例一】** 判断下列各题的对错(1) $\frac{c}{a} < \frac{c}{b}$ 且 $c > 0 \Rightarrow a > b$ ()(2) $a > b$ 且 $c > d \Rightarrow ac > bd$ ()(3) $a > b > 0$ 且 $c > d > 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{d}} > \sqrt{\frac{b}{c}}$ ()(4) $\frac{a}{c^2} > \frac{b}{c^2} \Rightarrow a > b$ ()**【例二】** (多选题) 下列说法中正确的是()A. 若 $a > b$, 则 $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$ B. 若 $-2 < a < 3, 1 < b < 2$, 则 $-3 < a - b < 1$ C. 若 $a > b > 0, m > 0$, 则 $\frac{m}{a} < \frac{m}{b}$ D. 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$ **【例三】** (1) 试证: $a^2 + b^2 \geq ab + a + b - 1$.

(2) 比较大小:

① $\sqrt{7} + \sqrt{10} \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{3} + \sqrt{14}$;② $\sqrt{7} - \sqrt{6} \underline{\hspace{1cm}} \sqrt{6} - \sqrt{5}$;③ $2^{(x^2+3)} \underline{\hspace{1cm}} 2^{2x}$.(3) (2017 课标 1) 设 x, y, z 为正数, 且 $2^x = 3^y = 5^z$, 则 ()A. $2x < 3y < 5z$ B. $5z < 2x < 3y$ C. $3y < 5z < 2x$ D. $3y < 2x < 5z$ **【点评】** 有时直接作差不好比较大小, 可以先平方、求倒数、“摘帽脱靴”后再作差.**【例四】** (1) 若 $a > b > 0, c < d < 0, e < 0$, 求证:

$$\frac{e}{(a-c)^2} > \frac{e}{(b-d)^2}.$$

(2) 当 $x \leq 1$ 时, 比较 $3x^3$ 与 $3x^2 - x + 1$ 的大小.(3) 设 $a > b > 0$, 比较 $a^a b^b$ 与 $a^b b^a$ 的大小.**【点评】** 两数(式)的大小比较的常用方法:

作差、作商、利用函数单调性、构造(平方, 倒数, 分子有理化, 数形结合)、放缩(架桥、介值比较法)若采用作差法后再与 0 比, 数与 0 之间的大小比较经常采用的技巧有因式分解、利用函数图像、配方.

2.2 基本不等式

【学习目标】

1. 了解基本不等式的几何背景，体会数形结合的思想，并从代数角度给出不等式的证明

2. 领会运用基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的三个限制条件

(一正二定三相等) 在解决最值中的作用

3. 能初步应用基本不等式求最值和证明简单的不等式

【重点】应用数形结合的思想理解基本不等式，并从不同角度探索不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的证明过程

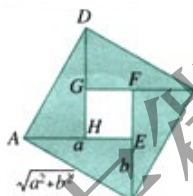
【难点】如何构造“积定求最小”、“和定求最大”

【情景引入】

如图是 2002 年在北京召开的第 24 届国际数学家大会会标，会标是根据我国古代数学家赵爽的“弦图”设计的，该图给出了迄今为止对勾股定理最早、最简洁的证明，体现了以形证数、形数统一、代数和几何是紧密结合、互不可分的。



★问题 1: 在这张“弦图”中能找出一些相等关系和不等关系吗？



1、重要不等式: $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (a, b 为一切实数，当且仅当 $a = b$ 时等号成立)

2、基本不等式: 若 $a, b > 0$ ，则有

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{当且仅当 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 时, 等号成立})$$

注: 称 $\sqrt{ab}$ 为 a, b 的几何平均数; 称 $\frac{a+b}{2}$ 为 a, b 的算

术平均数, 则基本不等式 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 又可叙述为:

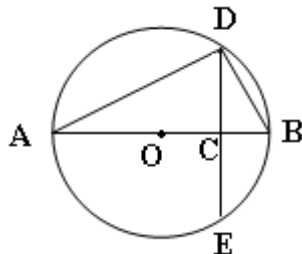
两个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数

★问题 2: 你能构造图形得到基本不等式的几何解释吗？

【引导思考】如图, AB 是圆 O 的直径, 点 C 是 AB 上一点, $AC = a$, $BC = b$. 过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE , 连接 AD 、 BD . 你能利用这个图形说出不等式

$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ 的几何解释

吗？



【练习 1】(1) 设 a, b 为正数, 证明 $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$.

(2) $x > 0$, 问当 x 取什么值时, $\frac{x^2 + 2}{x}$ 的值最小？

最小值是多少？

(3) 若 $x > 2$, 求 $x + \frac{1}{x-2}$ 的最小值.

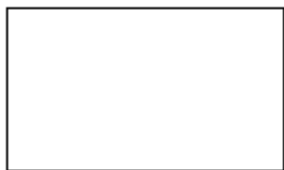
【例一】(1) 已知 $xy = 3$, 且 $x > 0, y > 0$, 求 $2x + 5y$ 的最小值;

(2) 已知 $x < 3$, 求 $f(x) = \frac{4}{x-3} + x$ 的最大值;

(3) 已知 x, y 是正实数, 且 $x + y = 4$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 的最小值.

(4) 若正数 x, y 满足 $x + 3y = 5xy$, 则 $3x + 4y$ 的最小值是_____.

【例二】(1) 用篱笆围成一个面积为 100 m^2 的矩形菜园, 问这个矩形的长、宽各为多少米时, 所用篱笆最短. 最短的篱笆是多少?



(2) 一段长为 36 m 的篱笆围成一个的矩形菜园, 问这个矩形的长、宽各为多少时, 菜园的面积最大, 最大面积是多少?

点拨: 对于 $x, y \in \mathbf{R}^+$,

(1) 若 $xy = p$ (定值), 则当且仅当_____时, $x + y$ 有最小值_____;

(2) 若 $x + y = s$ (定值), 则当且仅当_____时, xy 有最大值_____.

【例三】(1) 下列不等式一定成立的是()

A. $\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} > \sqrt{x} (x > 0)$ B. $x + \frac{1}{x} \geq 2 (x \neq 0)$

C. $x^2 + 1 \geq 2|x| (x \in \mathbf{R})$ D. $\frac{1}{x^2 + 1} > 1 (x \in \mathbf{R})$

(2) 下列结论正确的是()

A. 当 $x > 0$ 时, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

B. 当 $x > 2$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值是 2

C. 当 $x < \frac{5}{4}$ 时, $y = 4x - 2 + \frac{1}{4x - 5}$ 的最小值是 1

D. 设 $a > 0$, 则 $a^3 + \frac{1}{a^2}$ 的最小值是 2

【例四】证明: 若 $a, b > 0$, 则

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

【例五】(1) 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的最大值为_____.

(2) 设 $0 < x < 2$, 则函数 $y = \sqrt{x(4 - 2x)}$ 的最大值为_____.

(3) 若对所有正数 x, y , 不等式 $x + y \leq a\sqrt{x^2 + y^2}$ 都成立, 则 a 的最小值是()

A. $\sqrt{2}$ B. 2

C. $2\sqrt{2}$ D. 8

(4) 设 $x > 0$, 则 $\frac{x^2 + x + 3}{x + 1}$ 的最小值为_____.

(5) 已知实数 $x, y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + y = 1$, 则 $2x + \frac{1}{y}$ 的最小值是()

A. 6 B. $3 + 2\sqrt{2}$

C. $2 + 3\sqrt{2}$ D. $1 + \sqrt{2}$

【例六】(1) 若正数 x, y 满足 $x^2 + 3xy - 1 = 0$, 则 $x + y$ 的最小值是()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) 已知正数 a, b 满足 $a + b - ab + 3 = 0$, 则 ab 的最小值是_____.

(3) 若 $x > 0, y > 0$ 且 $x + y = xy$, 则 $\frac{x}{x-1} + \frac{2y}{y-1}$ 的最小值为()

A. 3 B. $\frac{5}{2} + \sqrt{6}$

C. $3 + \sqrt{6}$ D. $3 + 2\sqrt{2}$

2.2.2 基本不等式的应用

【新课引入】：现有一台天平，两臂长不相等，其余均精确，有人说要用它称物体的重量，只需将物体放在左右托盘各称一次，则两次所称重量的和的一半就是物体的真实重量。这种说法对吗？并说明你的结论。

[引导思考 1] 假设物理的真实重量为 M ，两次所称重量的砝码的重量分别为 m_1 和 m_2 ，利用天平平衡的原理求出 M 与 m_1 、 m_2 的关系。

答：_____

[引导思考 2] 你认为原来求平均数的方法求出的值比真实重量大还是小？

答：_____

【知识点】

基本不等式链：若 $a \geq b > 0$,

$$\text{则 } a \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \geq b$$

注：1. 利用基本不等式证明不等式，关键是所证不等式中必须有“和”式或“积”式，通过将“和”式转化为“积”式或将“积”式转化为“和”式，从而达到放缩的效果。证明不等式常用的变形技巧有：

(1) 拆分、配凑：将所要证明的不等式先拆分成几部分，再利用基本不等式证明，使用不等式的基本性质得到原不等式的证明。

(2) 常值代换：利用已知的条件或将已知条件变形得到含“常值”的式子，将“常值”代入后再利用基本不等式证明。

需要注意多次运用基本不等式时，等号能否取到。

【例一】(1) 若正数 x, y 满足 $x+3y=5xy$ ，当 $3x+4y$ 取得最小值时， $x+2y$ 的值为()

A. $\frac{24}{5}$

B. 2

C. $\frac{28}{5}$

D. 5

(2) 若 $x > 0, y > 0$ 且 $x+y=4$ ，则下列不等式中恒成立的是 ()

A. $\frac{1}{x+y} > \frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 1$

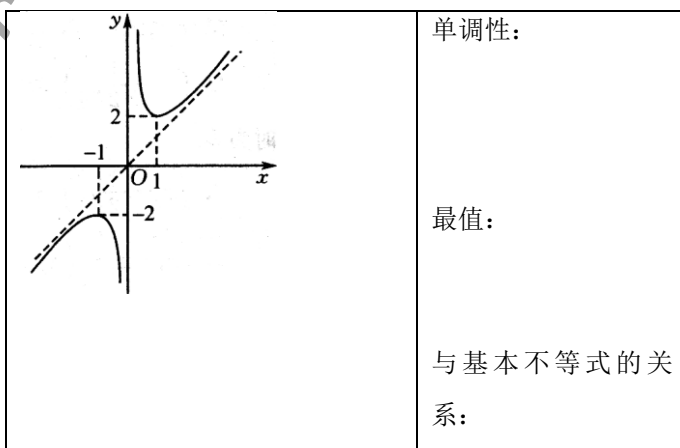
C. $\sqrt{xy} \geq 2$

D. $\frac{1}{xy} \geq 1$

(3) 设 $a > b > c$ ，且 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{m}{a-c}$ 恒成立，求 m 的取值范围。

(4) 已知 $a > b > 0$ ，则 $a^2 + \frac{64}{b(a-b)}$ 的最小值为_____。

【例二】(非常重要的函数) 对勾函数： $y = x + \frac{1}{x}$ ，图象如图所示。



(1) 若对任意 $x > 0$ ， $\frac{x}{x^2+3x+1} \leq a$ 恒成立，则 a 的取值范围是_____。

(2) 若 $f(x) = x + \frac{a}{x-1}$ 在 $x \geq 2$ 时有最小值 4，则 $a =$ _____。

(3) 若不等式 $x^2+ax+1 \geq 0$ 对一切 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 成立,

则 a 的最小值为()

- A. 0 B. -2 C. $-\frac{5}{2}$ D. -3

(4) 已知 $a > 0, b > 0$, 若不等式 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{m}{2a+b}$ 恒

成立, 则 m 的最大值等于()

- A. 10 B. 8 C. 9 D. 7

【例三】(2021·海淀期末) 当 $0 < m < \frac{1}{2}$ 时, 若 $\frac{1}{m} + \frac{2}{1-2m}$

$\geq k^2 - 2k$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围为()

- A. $[-2, 0) \cup (0, 4]$ B. $[-4, 0) \cup (0, 2]$
C. $[-4, 2]$ D. $[-2, 4]$

【例四】(高考山东卷) 设正实数 x, y, z 满足 $x^2 - 3xy$

$+ 4y^2 - z = 0$. 则当 $\frac{xy}{z}$ 取得最大值时, $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z}$ 的最大值

为()

- A. 0 B. 1
C. $\frac{9}{4}$ D. 3

【例五】(1) 已知正实数 a, b 满足 $a+2b=1$, 则

$a^2+4b^2+\frac{1}{ab}$ 的最小值为_____.

(2) 设 x, y 为实数, 若 $x^2+y^2+xy=1$, 则 $x+y$ 的最大值是_____.

(3) (2021·邯郸模拟) 设 $x>0, y>0$, 且 $\left(x-\frac{1}{y}\right)^2 = \frac{16y}{x}$,

则当 $x+\frac{1}{y}$ 取最小值时, $x^2+\frac{1}{y^2}$ =_____.

(4) (2020·扬州五月调研) 已知 $x>0, y>0$, 则

$x+\frac{y}{x}+\frac{16}{xy}$ 的最小值为_____.

★【例六】(1) (2021·天津模拟) 已知 x, y 为正实数,

则 $\frac{2x}{x+2y} + \frac{x+y}{x}$ 的最小值为_____.

(2) 若实数 x, y 满足 $xy > 0$, 则 $\frac{x}{x+y} + \frac{2y}{x+2y}$ 的最大值为_____.

【例七】已知 $a>0, b>0, a+b=1$, 求证:

$$\textcircled{1} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} \geq 8; \quad \textcircled{2} \left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \geq 9.$$

2.3.1 二次函数与一元二次方程、不等式

【学习目标】

1. 理解二次函数与一元二次方程、不等式的关系，掌握一元二次不等式的解法（图象法）
2. 理解分式不等式的求解原理，会解可化为一元二次不等式（组）的简单分式不等式
3. 初步掌握一元二次不等式的应用

【重点】二次函数与一元二次方程、不等式的联系，会借助二次函数的图象求解一元二次不等式

【难点】会用分类讨论思想解含参数的一元二次不等式

★问题 1：什么是一元二次不等式？

一元二次不等式的概念：

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，称为一元二次不等式。

一元二次不等式的一般形式是：

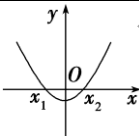
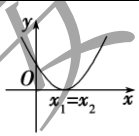
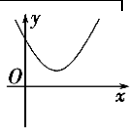
$ax^2+bx+c>0(a\neq 0)$ 或 $ax^2+bx+c<0(a\neq 0)$ 。

【思考 1】：(1)不等式 $x^2+\frac{2}{x}>0$ 是一元二次不等式吗？

(2)一元二次不等式的一般形式中“ $a\neq 0$ ”可以省略吗？

★问题 2：一元二次不等式和二次函数、一元二次方程有什么关系？如何利用他们之间的关系图解一元二次不等式？

“三个二次”之间的关系

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
$ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两个不相等的实数根 $x_1, x_2(x_1<x_2)$	有两个相等的实数根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	无实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x x>x_2 \text{ 或 } x<x_1\}$	$\{x x\neq -\frac{b}{2a}\}$	$\mathbf{R}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x x_1<x<x_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

注：图解法解一元二次不等式的一般步骤：

- (1)将原不等式化为标准形式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0(a>0)$ ；
- (2)求 $\Delta=b^2-4ac$ ；
- (3)若 $\Delta<0$ ，根据二次函数的图象直接写出解集；
- (4)若 $\Delta\geq 0$ ，求出对应方程的根，画出对应二次函数的图象，写出解集。

【练习】1、不等式 $2x\leq x^2+1$ 的解集为()

- A. $\emptyset$ B. $\mathbf{R}$
C. $\{x|x\neq 1\}$ D. $\{x|x>1 \text{ 或 } x<-1\}$

2、求下列不等式的解集：

- (1) $x^2-4x+4>0$ ； (2) $-x^2+2x-3<0$ ；

- (3) $2x^2-3x-2\leq 0$ ； (4) $x(1-2x)\leq -3$ 。

注：(1)、上表中 $a>0$ ，若 $a<0$ 转化后再解不等式。

(2) 一元二次不等式求解口诀：（开口向上）大于取两边，小于取中间。

【例一】(2018 全国 I 卷)已知集合 $A=\{x|x^2-x-2>0\}$ ，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=()$

- A. $\{x|-1<x<2\}$ B. $\{x|-1\leq x\leq 2\}$
C. $\{x|x<-1\}\cup\{x|x>2\}$ D. $\{x|x\leq -1\}\cup\{x|x\geq 2\}$

【例二】已知不等式 $ax^2-bx+2<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$ ，求 a, b 的值。

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

【例四】解下列不等式：

$$(1) \frac{3x-1}{2-x} \geq 1; \quad (2) x < \frac{1}{x};$$

【例三】解关于 x 的不等式： $ax^2 + (1-a)x - 1 > 0 (a < 0)$.

$$(3) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} \leq 0; \quad (4) \frac{x^2 - 9x + 11}{x^2 - 2x + 1} \geq 7.$$

【例五】已知不等式 $mx^2 - mx - 1 < 0$.

(1) 若 $x \in \mathbf{R}$ 时不等式恒成立，求实数 m 的取值范围；

(2) 若 $x \in [1, 3]$ 时不等式恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3) 若满足 $|m| \leq 2$ 的一切 m 的值能使不等式恒成立，求实数 x 的取值范围.

★问题 3：如何求解简单的分式不等式？

分式不等式的求解方法：

(1) 标准化：移项通分化为 $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (或 $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$)；

$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ (或 $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$) 的形式，

(2) 转化为整式不等式（组）

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) > 0;$$

必修第1册第三章：函数的概念和性质

3.1.1 函数的概念

【学习目标】

1. 学会用集合观点理解函数的概念，了解函数的三要素，掌握函数的记法及意义
2. 学会数集的区间表示，会求函数的定义域
3. 掌握两个函数相等的条件，并能判断两个函数关系是否相同

【重点】函数的概念与表示

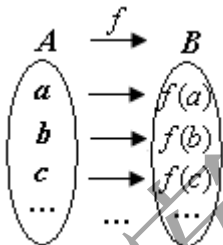
【难点】复合函数的定义域意义与求解

【复习引入】

初中我们学习过函数的概念：设在某变化过程中有两个变量 x, y ，如果对于 x 的_____的值， y 都有_____的值与它对应，那么就称_____是_____的函数，_____叫做自变量。

如：一次函数： $y = x + 1$ 反比例函数： $y = \frac{1}{x}$ 二次函数： $y = x^2 + 1$

★问题1：如何从集合的观点来理解函数的概念？



一般地，设 A, B 是_____的_____，如果按照_____，使对于集合 A 中的_____，在集合 B 中_____，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作_____。_____叫做函数的定义域，_____叫做函数的值域。

★问题2：函数的有哪些要素？其定义域能是空集吗？

【解读】：

- ① _____、_____、_____，称为函数的三要素。其核心是对应关系 f ，至于用什么字母表

示自变量、因变量和对应关系无所谓。除用符号 $f(x)$ 外，还常用 $g(x), F(x), G(x)$ 等符号来表示函数。

② $f(a)$ 的意义： $f(a)$ 表示_____。

③ 定义域 A 、值域 B 必须非空。如 $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{-x}$ 中， x 的定义域为空集 $\emptyset$ ，函数无意义。

④ 值域 $\subseteq$ 集合 B 。

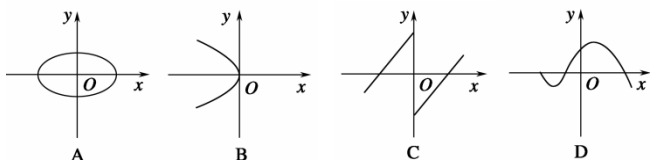
⑤ 由于值域可由定义域和对应关系唯一确定。两个函数当且仅当_____和_____分别相同时，才是同一函数。

【思考1】：说说 $f(x)$ 与 $f(a)$ 之间的区别与关系？

【思考2】： $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 与 $g(t) = t^2 - 2t - 1$ 是同一函数吗？

【思考3】：函数 $f(x) = x, x \in \{0, 1\}$ 和函数 $g(x) = x, x \in \{0\}$ 是同一函数吗？

【练习1】下列各图中，可表示函数 $y = f(x)$ 图象的只可能是()

【练习2】下列函数中哪个与函数 $y = x$ 相等？()

- (A) $y = (\sqrt{x})^2$ (B) $y = \sqrt[3]{x^3}$
(C) $y = \sqrt{x^2}$ (D) $y = \frac{x^2}{x}$

【例一】下列对应关系或关系式中，是 A 到 B 的函数的是_____ (填写序号)

(1) $x \rightarrow \frac{2}{x}, x \neq 0, x \in \mathbf{R}$;(2) $y^2 = x, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{R}$;

$$(3) f(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ 为有理数} \\ 1, & x \text{ 为无理数} \end{cases};$$

$$(4) A = B = \mathbf{N}^*, \text{ 对任意的 } x \in A, x \rightarrow |x-3|.$$

【例二】已知 $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $g(x) = -x^2 + 2$.

(1) 求 $f(3)$, $g(3)$ 的值;

(2) 求 $f[g(2)]$ 的值;

(3) 求 $f[g(x)]$ 的解析式.

(4) 求 $g[f(x)]$ 的解析式.

【思考】 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 是同一函数吗?

【例三】下列哪一组中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等()

A. $f(x) = x+1$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

B. $f(x) = x^2$, $g(x) = (\sqrt{x})^4$

C. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt[3]{x^6}$

D. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1}$

设 a, b 是两个实数, 并且 _____, 我们规定:

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间		
$\{x a < x < b\}$	开区间		
$\{x a \leq x < b\}$	左闭右开区间		
$\{x a < x \leq b\}$	左开右闭区间		
$\{x x \geq a\}$	无穷区间		
$\{x x > a\}$			
$\{x x \leq a\}$			
$\{x x < a\}$			

☆注: ① 实数集 $\mathbf{R}$ 可以用区间 _____ 表示;

② 用实心点表示“闭”, 用空心点表示“开”.

【练习3】集合 $\{x|-1 \leq x < 5, \text{ 且 } x \neq 3\}$ 用区间表示为 _____.

【例四】求下列函数的定义域, 并用区间表示:

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x+2}$;

(2) $f(x) = (x+1)^0$;

(3) $f(x) = \frac{3}{1-\sqrt{1-x}}$;

(4) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} - \sqrt{4-x}$.

【例五】解答下列问题:

(1) $f(x)$ 定义域为 $[1, 4]$, 则 $f(x+2)$ 的定义域为 _____;

(2) $f(x+2)$ 定义域为 $[1, 4]$, 则 $f(x)$ 的定义域为 _____;

(3) $f(x)$ 定义域为 $[1, 4]$, 则 $g(x) = f(x) + f(x+1)$ 的定义域为 _____.

(4) 若函数 $y = f(2x-1)$ 的定义域为 $[-3, 5]$, 则函数 $y = f(x+1)$ 的定义域为 _____;

【例六】已知 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$, 求 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2021) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \dots + f(\frac{1}{2021})$ 的值.

3.1.2 函数的三要素

【探究一】函数值域的求解方法

★问题 1：求给定解析式表示的函数的定义域时，一般考虑哪些原则？

答：三条原则：①分母_____；②偶次根号下为_____；③要使 x^0 有意义，则 x _____.

★问题 2：如何求解函数的值域？

求函数值域的常用方法：图象法、配方法、换元法、分离常数法、判别式法

【例一】求下列函数的值域：

(1) $y = x^2 + x$ ($-1 < x \leq 1$)；

(2) $f(x) = 4 - \sqrt{3 + 2x - x^2}$ ；（配方法）

(3) $f(x) = \frac{5x+4}{x-1}$ ；（分离常数法）

(4) $y = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1}$ ；（判别式法，定义域为一切实数

时）

【题 4】还有其它方法吗？

(5) $y = x - \sqrt{2x+1}$ ；（换元法）

(6) $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ ；

(7) $y = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ 。

【例二】求下列函数的值域：

(1) $y = \frac{2x^2 - x + 1}{2x - 1}$ ($x > \frac{1}{2}$)；

(2) $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2+x}$ ；

【探究二】函数解析式的求解方法

求函数解析式的常用方法：待定系数法、换元法、列方程组法（消去法）、赋值法

【例四】（待定系数法）

(1) (2020 湖北部分重点中学高一联考) 已知一次函数 $f(x)$ 满足 $f[f(x)] = 4x + 6$ ，则 $f(x)$ 的解析式为_____.

(2) 已知 $f(x)$ 是二次函数，且 $f(x+1) + f(x-1) = 2x^2 - 4x - 4$ ，求 $f(x)$ 的解析式.

【例五】（换元法、配凑法）

(1) 已知 $f(\sqrt{x+1}) = x + 2\sqrt{x}$ ，则 $f(x)$ 的解析式为_____.

(2) 已知 $f\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{x^2} + \frac{1}{x}$ ，求 $f(x)$.

【例六】（列方程组法）

(1) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = x$ ，则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.

(2) 已知 $af(x) + f(-x) = bx$ ，其中 $a \neq \pm 1$ ，求函数 $f(x)$ 的解析式.

【例七】（抽象函数求解：赋值法）

(1) 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，且满足 $f(0) = 1$ ，且对于任意 x, y ，有 $f(x+y) = f(x)f(y) - f(x-y) - 1$ ，求 $f(x)$ 表达式及值域.

(2) 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上，且满足 $f(x) \cdot f(x+2) = 13$ ，若 $f(1) = 2$ ，求 $f(99)$.

【例八】 已知函数 $y = \sqrt{mx^2 - 6mx + m + 8}$.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，求实数 m 的取值范围；

(2) 若 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$ ，求实数 m 的取值范围.

3.1.3 函数的表示法、分段函数

【学习目标】

1. 知道函数的三种基本表示方法及各自优点与不足
2. 理解分段函数的概念，会画简单的分段函数的图像，体会分段函数图像的特点，掌握分段函数的解析表示，并能正确求出分段函数在某点的函数值

【重点】 分段函数的图像与解析式的特点

【难点】 分段函数概念的理解：解析式分“若干段”

【材料引入】初中我们学过，表示函数常用的三种方法是_____、_____、_____.

阅读教材第 60、61 页的问题<1>、<2>、<3>、<4>，然后回答下列问题：

★问题 1：你能说出函数三种表示方法各自的特点吗？

方 法 名称	方法介绍	特点
	用数学表达式表示两个变量之间的对应关系的方法	①简明、全面地概括了变量间的关系； ②可以通过解析式求出任意_____
	用图象表示两个变量之间的对应关系的方法	能直观形象地_____
	列出表格来表示两个变量之间的对应关系的方法	不需要计算就可以直接看出_____

★问题 2：每个函数都能用以上三种方法来表示吗？能否列举出一些函数关系只能用其中某种方法表示的？

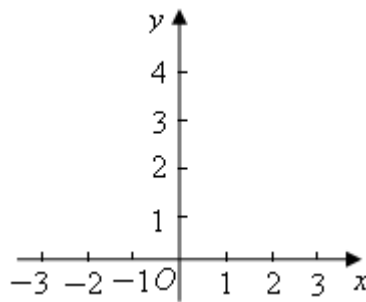
答：_____

★问题 3：用解析式法表示函数时，函数的解析式是唯一的吗？或者说函数必须由一个式子给出吗？

【探究一】 分段函数的表示方法与图像特征

【例一】 画出函数 $y=|x|$ 的图象.

解：列表：



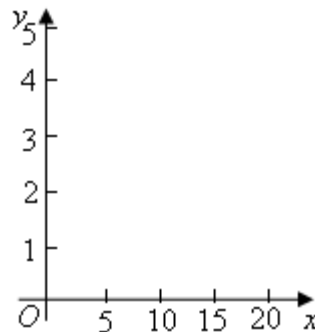
【例二】 某市“招手即停”公共汽车的票价按下列规则制定：

(1) 5 公里以内（含 5 公里），票价 2 元；

(2) 5 公里以上，每增加 5 公里，票价增加 1 元（不足 5 公里的按 5 公里计算）.

如果某条线路的总里程为 20 公里，请根据题意，写出票价与里程之间的函数关系式，并画出函数的图象.

解：

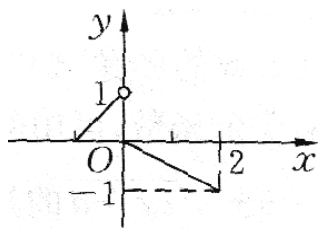


[思考]：以上两题的图象有什么特点，跟我们以前所学习的函数图象有什么不一样？

在函数的定义域内，对于自变量 x 的不同取值范围，有着不同的对应关系，这样的函数通常叫做_____.

分段函数的定义域是各段定义域的_____，其值域是各段值域的_____.

【练习一】已知函数 $f(x)$ 的图像如下图所示，则 $f(x)$ 的解析式是_____.



【练习二】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 2, \\ f(x+3), & x < 2, \end{cases}$ 则 $f(1) - f(3)$ = _____.

★问题 4：如何求解分段函数的函数值呢？

【探究二】分段函数函数值的求解

【例一】设 $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x < 0 \\ -\frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$ ，则 $f(-\frac{3}{4}) =$ _____.

_____， $f\{f[f(-\frac{3}{4})]\} =$ _____.

【例二】(1) 已知 $f(x) = \begin{cases} x+2, & (x \leq -1) \\ x^2, & (-1 < x < 2) \\ 2x, & (x \geq 2) \end{cases}$ ，若 $f(x) = 3$ ，

则 x 的值是 ()

- A. 1 B. 1 或 $\frac{2}{3}$ C. 1, $\pm\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}$ D. $\sqrt{3}$

(2) (多选题) 著名的 Dirichlet 函数

$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 取有理数时,} \\ 0, & x \text{ 取无理数时,} \end{cases}$ 则与 $D[D(x)]$ 相等的有

()

- A. $D(2)$ B. $D(3)$
C. $D(\sqrt{2})$ D. $D(\pi)$

【例三】(湖南卷) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & (x \leq 0) \\ 2, & (x > 0) \end{cases}$,

若 $f(-4) = f(0)$, $f(-2) = -2$, 则关于 x 的方程

$f(x) = x$ 的解得个数为 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【例四】(福建卷) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1, & (x \geq 0) \\ \frac{1}{x}, & (x < 0) \end{cases}$ ，若

$f(a) > a$ ，则 a 的取值范围是_____.

【例五】(1) 若关于 x 的方程 $|x^2 + x - 2| = m$ 有四个根，则实数 m 的取值范围为_____.

(2) 若方程 $x^2 - 4|x| + 5 = m$ 有 4 个互不相等的实数根，则 m 的取值范围为_____.

【例六】求函数 $f(x) = |x+1| + |x-2|$ 的值域.

【例七】用 $\min\{a, b, c\}$ 表示 a, b, c 三个数中的最小值，则函数 $f(x) = \min\{4x+1, x+4, -x+8\}$ 的最大值是_____;

3.2.1 函数的单调性

【学习目标】

1. 理解增函数、减函数的概念，会用函数增减性的概念判断函数在某一区间的增减性
2. 了解函数的增减性与定义区间有关，熟悉一次、反比例、二次函数在对应区间上的单调性，能利用函数的单调性进行函数值的大小比较
3. 会用赋值法判断简单抽象函数的单调性

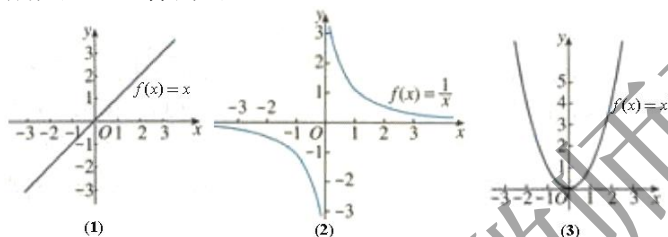
【重点】 函数增减性的概念及其判断证明

【难点】 理解单调性理论证明的格式要求，体会用定义法判断函数增减性的逻辑推理过程

【情境引入】

前面我们学习了函数的概念，深入接触了函数的三要素，接下来我们继续学习函数的更多的性质。那么我们要学习函数的哪一些性质呢？从函数的图象上看，可以通过研究函数图象的变化趋势（递增递减性）、函数图象的对称性（奇偶性）、函数图象的变换（平移与旋转、轴对称）等等，从而对函数有更深入的认识。

那么，让我们从初中最基础的三个函数图象开始吧……观察下面三个函数的图象，你能说说它们的增减性是怎么样的吗？



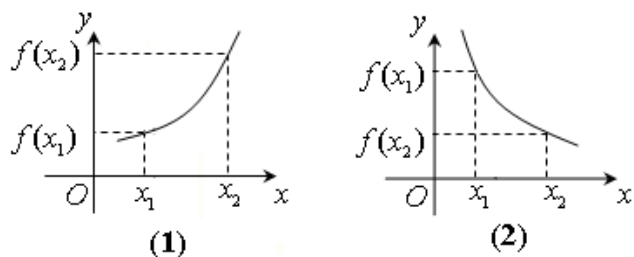
★问题 1：上面函数在定义域内都是不断增大（或不断减小）的吗？

答：_____，这说明函数图象的不断增大（或不断减小）要放在某个特定的_____内进行研究。

★问题 2：如果不画函数的图象，如何利用函数的解析式描述“随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 也随着增大”？

（或“随着 x 的增大，相应的 $f(x)$ 却随着减小”）

【探究一】 函数增减性的定义



一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I ：

如果对于定义域内某个区间 D 上_____两个自变量的值 x_1 、 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有_____，

那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是**增函数**，如上图（1）所示（也称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增）；

如果对于定义域内某个区间 D 上 任意 两个自变量的值 x_1 、 x_2 ，当 $x_1 < x_2$ 时，都有_____，

那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是**减函数**，如上图（2）所示（也称 $f(x)$ 在区间 D 上单调递减）。

★注：如果一个函数在某个区间 D 上是增函数或是减函数，就说这个函数在这个区间 D 上具有_____，区间 D 也称为_____。

【练习 1】函数 $y = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ 的增区间为_____。

【练习 2】函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ 的增区间为_____。

【练习 3】已知函数 $f(x) = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是增函数，则实数 k 的取值范围是_____。

★问题 3：上述定义中的“任意”二字可以去掉吗？为什么？请结合下面的思考进行说明。

【思考】：“我们知道函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，任取 $x_1 \in (-\infty, 0)$ ， $x_2 \in (0, +\infty)$ ， $\therefore f(x_1) < 0, f(x_2) > 0$ ， $\therefore f(x_1) < f(x_2)$ ，所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在定义域内是增函数。”以上说法对吗？为什么？如果错误，应该怎么说？

★注： x_1, x_2 应属于同一个单调区间。

【例一】 求证：函数 $f(x) = x^3 - 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数.

用定义证明函数单调性的步骤：

(1) 任取：任取 x_1, x_2 为该区间内任意的两个值，且 $x_1 < x_2$ ；

(2) 作差变形：作差 $f(x_1) - f(x_2) = \dots$ 通过因式分解、配方、有理化等方法，向有利于判断差值符号的方向变形；

(3) 定号：确定 $f(x_1) - f(x_2)$ 的符号，当符号不确定时，可考虑分类讨论；

(4) 判断：根据定义作出结论.

【例二】 求证：函数 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数.

【例三】 已知函数 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}, x \in [2, 6]$ ，求函数的最大值和最小值.

【例四】 (1) 已知 $f(x)$ 定义域为 $[-1, 1]$ ，且对 $\forall x_1, x_2 \in [-1, 1]$ ，都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ，且

$f(t-2) < f(1-t)$ ，则 t 的取值范围为_____.

(2) 已知 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的减函数，若 $f(2a^2 + a + 1) < f(3a^2 - 4a + 1)$ 成立，求 a 的取值范围.

【例五】 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$ ， $f(xy) = f(x) + f(y)$ ，对任意 $x, y \in (0, +\infty)$ 都成立. 当 $x > 1$ 时， $f(x) > 0$.

(1) 求 $f(1)$ ；

(2) 求证： $f(x)$ 在定义域上是增函数；

(3) 如果 $f(\frac{1}{3}) = -1$ ，求满足不等式 $f(x) - f(x-2) \geq 2$ 的 x 的取值范围.

3.2.2 函数的最值

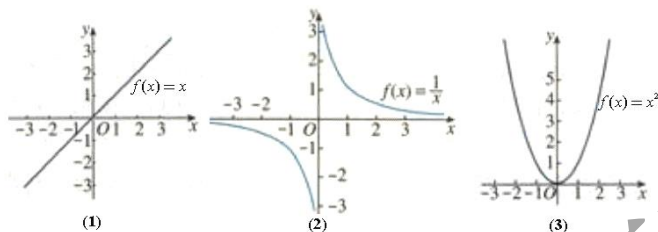
【学习目标】

1. 理解函数最大(小)值的概念,能利用函数图象判断函数的最大(小)值
2. 了解二次函数的最大(小)值与所给定的区间有关,会求对称轴不确定或区间不确定的二次函数在闭区间上的最值问题

【重点】函数最大(小)值的概念及二次函数在闭区间上的最值的求解方法

【难点】结合二次函数的图象分析求解它在闭区间上对称轴不确定或区间不确定时的最值

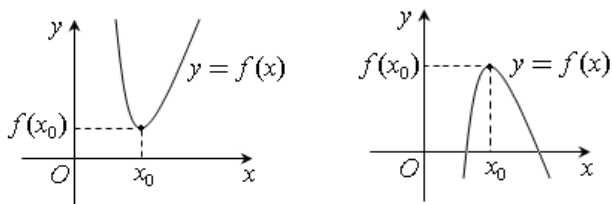
【情境引入】



继续观察这三个图象,函数 $f(x)=x$ 与 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的图象都没有最高点和最低点,但是 $f(x)=x^2$ 的图象有一个最低点 $(0,0)$,没有最高点,我们就说函数 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上有最小值 0,没有最大值.

★问题 1: 从图象上看,图象的最高点就是函数的最大值,图象的最低点就是函数的最小值,但是,不用图象的方法,如何描述函数的最大值(最小值)呢?

【探究一】函数最大(小)值的定义



仿照函数 $f(x)=x^2$ 的图象我们很快可以得到最

小值的定义:

一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I ,如果存在实数 M 满足:

(1) 对于任意的 $x \in I$, 都有 _____;

(2) _____ $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0)=M$.

那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.

【思考 1】: 你能仿照函数最小值的定义,给出函数 $y=f(x)$ 的最大值的定义吗?

一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I ,如果存在实数 M 满足:

(1) _____;

(2) _____.

那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值.

【思考 2】: 如何理解定义中的“任意”与“存在”两词,两个条件可以缺少一个吗?

★问题 2: 函数 $y=f(x)$ 在其定义域上一定有最大、最小值吗? 单调函数呢?

若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是增函数,则函数的最小值为 $y_{\min} =$ _____, 最大值为 $y_{\max} =$ _____;
若函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是减函数,则函数的最小值为 $y_{\min} =$ _____, 最大值为 $y_{\max} =$ _____;

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上是增函数,则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上 _____ 最值,但可以说 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上的值域为 _____;

【例一】 (1) 函数 $y=\sqrt{5-4x-x^2}$ 的单调递增区间是 ()

- A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, +\infty)$
C. $(-5, -2]$ D. $[-2, -1)$

(2) 已知函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是减函数, 则

$f(\frac{3}{4})$ 与 $f(a^2 - a + 1)$ 的大小关系是_____.

(3) 在函数 $y = f(x)$ 的定义域中存在无数个实数 x 满足 $f(x) \geq M$, 则()

- A. 函数 $y = f(x)$ 的最小值为 M
- B. 函数 $y = f(x)$ 的最大值为 M
- C. 函数 $y = f(x)$ 无最小值
- D. 不能确定 M 是函数 $y = f(x)$ 的最小值

【探究】二次函数在闭区间里的最值问题

类型一：轴定区间定问题

【例二】已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[2, 4]$ 上的最大值为_____, 最小值为_____;

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 4]$ 上的最大值为_____, 最小值为_____;

(3) 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 3]$ 上的值域为_____.

【思考4】二次函数在闭区间上的最值一定在区间端点处取吗?

类型二：轴定区间变问题

【例三】已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2$, 若 $x \in [t, t+1]$, 求函数 $f(x)$ 的最小值.

类型三：轴变区间定问题

【例四】求二次函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 2$ 在 $[2, 4]$ 上的最小值和最大值.

类型四：恒成立问题

【例五】已知 $f(x) = x^2 - 2ax + 2$, 若 $x \in [2, 4]$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

【例六】规定 $\max\{a, b\}$ 表示取 a, b 中的较大者, 例如: $\max\{0.1, -2\} = 0.1$, $\max\{2, 2\} = 2$.

则函数 $f(x) = \max\{|x+1|, |x^2-5|\}$ 的最小值为_____.

3.2.3 函数的奇偶性

【学习目标】

1. 掌握偶函数的图象关于 y 轴对称, 奇函数的图象关于原点对称的特性, 了解奇偶函数定义域必须对称的特征
2. 理解偶函数、奇函数的概念, 会用奇偶函数的定义去判断一个函数是否具有奇偶性
3. 经历奇偶性概念的形成过程, 提高观察抽象能力以及从特殊到一般的归纳概括能力, 体会数形结合的思想, 感受数学的对称美

【重点】奇偶性概念的数学化提炼过程, 并利用函数的奇偶性定义来判断函数奇偶性

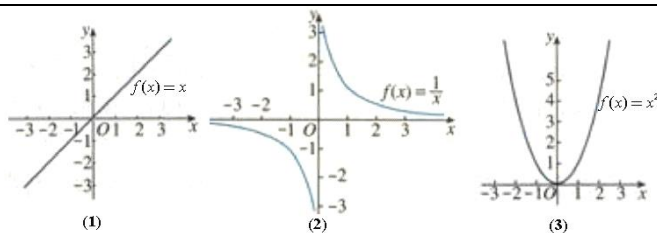
【难点】函数奇偶性的判断

【情境引入】

古希腊哲学家、数学家毕达哥拉斯以发现勾股定理(西方称毕达哥拉斯定理)著称于世.

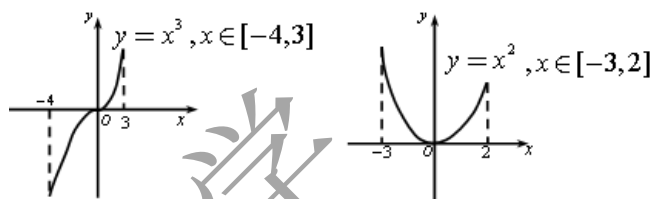


他曾说: “一切平面图形中, 最美的是圆形. 因为圆在各个方向上都是对称的, 是一种极致的美.” 可以说, 大自然就是用对称来组织和生成的: 自然界的天与地、人类的男和女、语文的同义与反义、英语的实词与虚词、化学的有机与无机、物理的作用力与反作用力、数学的正数与负数、代数与几何、导数与积分、定积分与不定积分等等无不体现着对称和谐之美. 在初中, 我们还学习了两种最基本的对称图形: 轴对称图形和中心对称图形, 我们学过的很多函数的图象也具有对称性, 你能说说下面的函数图象是哪种对称图形吗?



我们把图象关于原点中心对称的函数叫做_____;
把图象关于 y 轴轴对称的函数叫做_____.

★问题 1: 下列函数图象具有奇偶性吗? 为什么?

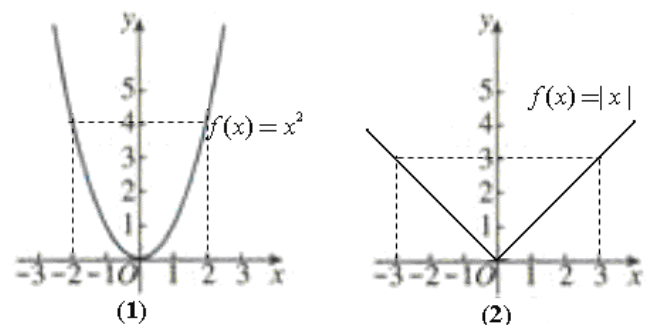


从问题 1 看出: 函数具有奇偶性的前提条件是_____.

【练习 1】函数 $f(x) = x^2 + bx + 3$ 在区间 $[-a, a]$ 上是偶函数, 则 $a + b =$ _____.

★问题 2: 对于某些函数, 若不能直接画出它们的图象, 该通过什么方法判断它们的奇偶性?

【探究一】函数奇偶性的概念描述



首先观察上面两个函数, 它们都是_____函数, 从解析式上看都有什么特点?

对于函数 $f(x) = x^2$,

$f(-x) =$ _____ = _____

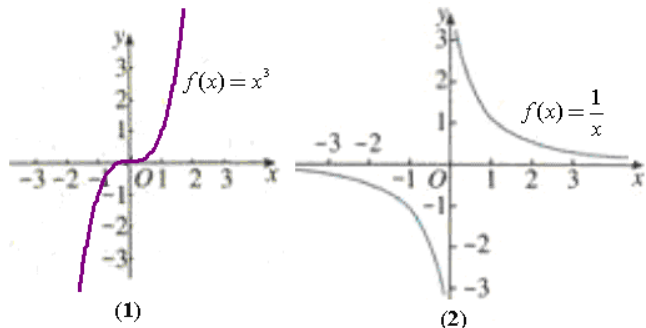
对于函数 $f(x) = |x|$,

$f(-x) =$ _____ = _____

由此，我们得到偶函数的另一种描述：

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____，那么函数 $f(x)$ 叫做偶函数.

再观察下面两个函数，它们都是_____函数，从解析式上看又有什么特点？



对于函数 $f(x) = x^3$,

$$f(-x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

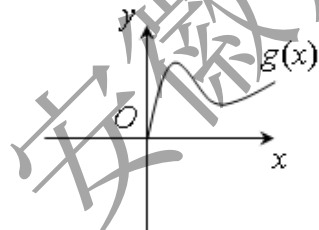
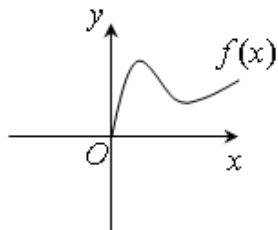
对于函数 $f(x) = \frac{1}{x}$,

$$f(-x) = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

由此，我们得到奇函数的另一种描述：

一般地，如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x ，都有_____，那么函数 $f(x)$ 叫做奇函数.

【练习 2】已知 $f(x)$ 是偶函数， $g(x)$ 是奇函数，试将下图补充完整.



【例一】判断下列函数的奇偶性

① $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x - 1}$

② $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

③ $f(x) = -x^4 + x^2 - 2$

④ $f(x) = x^2 + x - 4$

⑤ $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$ ⑥ $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2}$

⑦ $f(x) = |x+1| - |x-1|$ ⑧ $f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

⑨ $f(x) = (1+x)^3 - 3(1+x^2) + 2$ ⑩ $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x-2|-2}$

【例二】判断函数 $f(x) = \begin{cases} x(1-x), & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x(1+x), & x > 0 \end{cases}$ 的奇偶性.

【例三】已知函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称，且当 $x > 0$ 时， $f(x) = x^2 - 2x + 3$. 试求 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的表达式.

3.2.4 函数奇偶性的应用

1. 函数奇偶性判断方法一:

首先定义域要关于原点对称,

若 $f(-x) = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow f(x)$ 为奇函数;

若 $f(-x) = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow f(x)$ 为偶函数.

2. 函数奇偶性判断方法二:

首先定义域要关于原点对称,

若 $f(x)$ 为奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 图象关于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 对称;

若 $f(x)$ 为偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 图象关于 $\underline{\hspace{2cm}}$ 对称;

特别地, 若 $f(x)$ 为奇函数且在 $x=0$ 处有定义, 则必有 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$; 如果一个函数即是奇函数又是偶函数, 则其值域为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 反之却不成立; 若 $f(x)$ 为偶函数, 则恒有 $f(x) = f(|x|)$.

【思考 1】奇函数的图象一定过原点吗?

【思考 2】由奇(偶)函数图象的对称性, 在作函数图象时你能想到什么简便方法?

请你快速作出函数 $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$ 和 $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

的简图.

【练习】(1) 若函数 $f(x) = \frac{-x+a}{bx+1}$ 为区间 $[-1,1]$ 上的奇函数, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 画出函数 $f(x) = x^2 - 4|x| + 5$ 的简要图象, 并根据图象求出当 m 为何值时, 方程 $x^2 - 4|x| + 5 = m$ 有四个互不相等的实根? 那 m 为

何值时, 方程又有两个实数根呢?

【例一】已知函数 $f(x)$ 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x(1-x)$.

①若 $f(x)$ 为 R 上的奇函数, 求 $f(x)$ 的解析式;

②若 $f(x)$ 为 R 上的偶函数, 能确定 $f(x)$ 的解析式吗? 请说明理由!

【思考 3】若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 R 上的奇函数, 试判断函数 $F(x) = f(x) + g(x)$ 和 $G(x) = f(x) \cdot g(x)$ 的奇偶性.

3. 函数奇偶性判断方法三:

具有奇偶性的两个函数在同一定义域(或定义域的交集上)上有:

奇+奇=奇	奇-奇=奇	偶+偶=偶
奇 $\times$ 奇=偶	奇 $\times$ 偶=奇	偶 $\times$ 偶=偶

【例二】(多选题) 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域都为 R ,

且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 则下列结论中正确的是 ()

- A. $|f(x)g(x)|$ 是奇函数 B. $f(x)|g(x)|$ 是奇函数
C. $f(x)+|g(x)|$ 是偶函数 D. $|f(x)|+g(x)$ 是偶函数

【变式 1】(福州卷) 设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的任意函数, 则下列叙述正确的是 ()

- A. $f(x)f(-x)$ 是奇函数
B. $f(x)|f(-x)|$ 是奇函数
C. $f(x)-f(-x)$ 是偶函数
D. $f(x)+f(-x)$ 是偶函数

【变式 2】已知 $f(x) = x^5 + ax^3 + bx + 8$ 且 $f(-2) = 10$, 则 $f(2)$ 的值为 _____; 若函数 $f(x)$ 在 $[-10, 10]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m , 则 $M + m =$ _____.

【变式 3】若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 有 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$, 则下列说法一定正确的是 ()

- A. $f(x)$ 为奇函数 B. $f(x)$ 为偶函数
C. $f(x)+1$ 为奇函数 D. $f(x)+1$ 为偶函数

【例三】(1) 已知奇函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数, 试问: 它在 $[-b, -a]$ 上是增函数还是减函数? 请给出证明.

(2) 已知偶函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数, 试问: 它在 $[-b, -a]$ 上是增函数还是减函数? 请给出证明.

注: 奇函数在对称的区间上的单调性相同

偶函数在对称的区间上的单调性相反

【应用练习】若奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上的最小值是 5, 那么 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上 ()

- A. 最小值是 5 B. 最小值是 -5
C. 最大值是 -5 D. 最大值是 5

【例五】(1) 设定义在 $[-2, 2]$ 上的奇函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, 若 $f(1-m) < f(m)$, 求实数 m 的取值范围.

(2) 偶函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1, 1]$, 且在 $[0, 1]$ 上单调递减, 若 $f(1-m) < f(m)$ 成立, 求 m 的取值范围.

(3) 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且在区间 $(-\infty, 0)$ 上递增, 若 $f(3a^2 + 2a + 1) > f(2a^2 - a + 1)$ 成立, 求 a 的取值范围.

【例六】函数 $f(x) = \frac{ax+b}{1+x^2}$ 是定义在 $(-1, 1)$ 上的奇函数, 且 $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$.

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的解析式;
(2) 用定义证明: $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上是增函数;
(3) 解不等式: $f(1+t) + f(t) < 0$.

3.3 幂函数

【学习目标】

1. 了解幂函数的定义，能区别幂函数与指数函数
2. 作出五种简单幂函数的图象，并能根据图象描述出这些简单幂函数的一些基本性质
3. 通过五种简单幂函数在第一象限的图象特征，总结归纳出幂函数在第一象限图象特征与指数之间的关系，从而概括出幂函数的性质
4. 能够运用幂函数的简单性质进行实数大小的比较

【重点】 幂函数的定义和五种简单幂函数的图象特征

【难点】 幂函数在第一象限图象特征与指数关系的总结归纳

【情景引入】

我们先来看看几个具体的问题，写出它们的函数解析式：

问题(其中 x 是自变量, y 是因变量)	函数解析式
(1) 如果矩形一边长为 1, 另一边长为 x , 矩形的面积为 y .	
(2) 如果正方形的边长为 x , 正方形的面积为 y .	
(3) 如果正方体(立方体)的边长为 x , 正方体的体积为 y .	
(4) 如果正方形场地的面积为 x , 正方形的边长为 y .	
(5) 如果矩形场地的面积为 1, 其中一边的长为 x , 另一边的长为 y .	

★问题 1: 以上情景中的五个函数有什么共同特征?

答: 以上 5 个函数的共同特征有:

(1) _____; (2) _____

(3) _____; (4) _____

上述问题中涉及的函数, 都是形如 _____ 的函数.

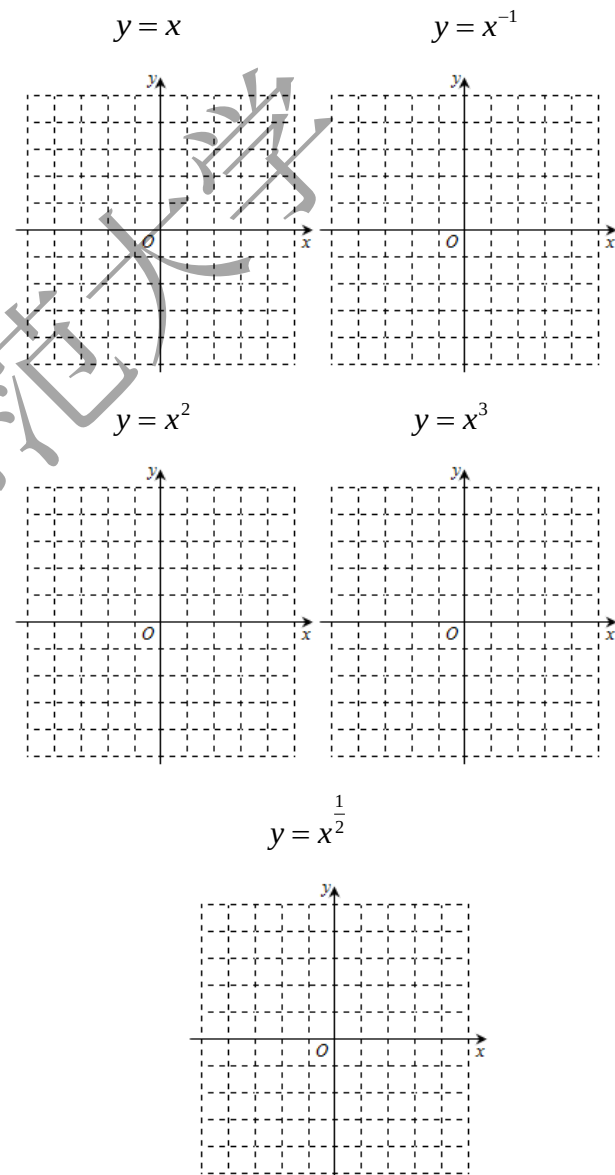
幂函数的定义:

一般地, 函数 _____ 叫做幂函数, 其中 x 为自变量, a 为常数.

★问题 2: 结合前面研究指数函数与对数函数的方法, 我们应如何来研究幂函数呢?

【探究】 幂函数的性质

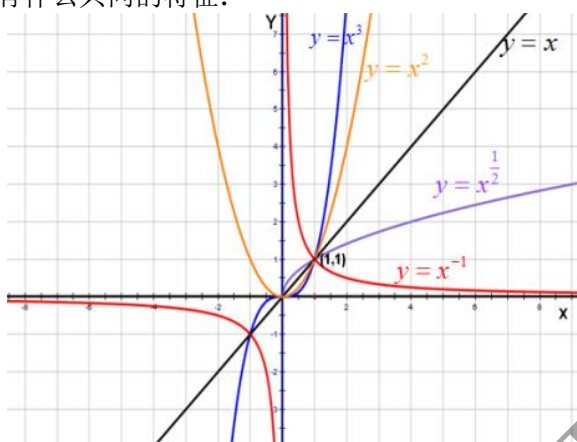
请在下面直角坐标系中分别画出上述 5 个幂函数的图象:



画出上述五个图象, 并在下表中写出每个函数的性质:

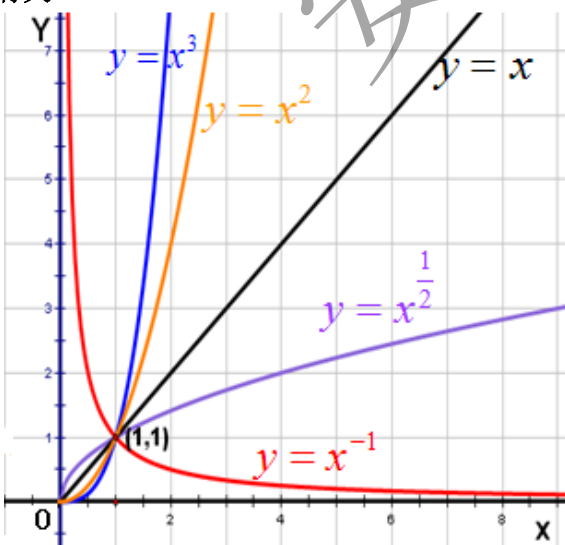
函数	定义域	值域	图象形状	单调性	奇偶性
$y = x$					
$y = x^2$					
$y = x^3$					
$y = x^{\frac{1}{2}}$					
$y = x^{-1}$					

我们如果将五个函数的图象放在同一个坐标系上，它们有什么共同的特征：



答：共同特征：

★问题3：我们发现，幂函数的图象都经过第一象限，都不过第四象限，而其他象限的图象可以通过第一象限的图象对称变换得到，因此，对幂函数的性质的探究，也主要是对幂函数在第一象限的图象的观察总结，我们把以上5个函数在第一象限的图象汇总（如下图），你有什么发现呢？它们的单调性有什么规律？与哪些量有关？



结论：（幂函数在第一象限的特征）

当 $a > 0$ 时，

- (1) _____
 (2) _____
 (3) _____

当 $a < 0$ 时，

- (1) _____
 (2) _____
 (3) _____

【练习1】：下列函数为幂函数的序号为 _____

① $y = \frac{1}{x^2}$; ② $y = 2x^2$; ③ $y = -x^2$; ④ $y = \sqrt{|x|}$;

⑤ $y = x^2 + x$; ⑥ $y = x^0$; ⑦ $y = \frac{2}{x}$.

【练习2】：若 $f(x) = mx^a + (2n-4)$ 是幂函数，则 $m+n$ 等于 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【练习3】：已知幂函数 $y = f(x)$ 的图象过点 $(3, 3\sqrt{3})$ ，则这个幂函数的解析式为 _____.

【例一】(1) 幂函数 $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^{m-4}$ 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数，则 m 的值为 _____.

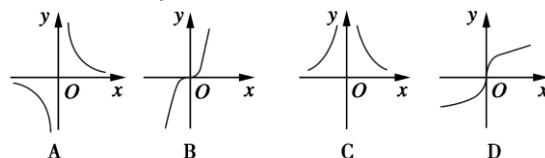
(2) 已知幂函数 $y = (m^2 - m - 1)x^{m^2 - 2m - 3}$ ，求此幂函数的解析式，并指出其定义域.

【例二】比较下列各组数的大小：

(1) $3^{\frac{5}{2}}$ 与 $3.1^{\frac{5}{2}}$; (2) $-8^{\frac{7}{8}}$ 与 $-\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{7}{8}}$;

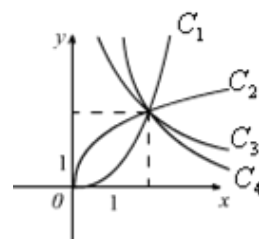
(3) $(-0.32)^{\frac{6}{5}}$ 与 $0.35^{\frac{6}{5}}$; (4) $3^{1.4}$ 与 $5^{1.5}$.

【例三】(1) 函数 $y = x^{\frac{5}{3}}$ 的图象大致是 ()



(2) 若四个幂函数 $C_1: y = x^a$, $C_2: y = x^b$, $C_3: y = x^c$, $C_4: y = x^d$ 在同一平面直角坐标系中的图象如图所示，则 a, b, c, d 的大小关系是 ()

- A. $d > c > b > a$
 B. $a > b > c > d$
 C. $d > c > a > b$
 D. $a > b > d > c$



3.4.1 函数的性质习题课

函数单调性判断方法一：

利用函数单调性定义判定：任取 x_1, x_2 、作差变形、判断符号、得出结论

(注：二次函数直接结合图象分析)“数形结合”

函数单调性判断方法二：

任取 $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$, 那么：

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

$\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是增函数；

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

$\Leftrightarrow f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是减函数。

函数单调性判断方法三：

奇函数在对称的区间上的单调性相同

偶函数在对称的区间上的单调性相反

函数单调性判断方法四：

利用下面一些结论直接判断：(小题中使用)

①函数 $y = -f(x)$ 与函数 $y = f(x)$ 的单调性相反

②函数 $f(x)$ 恒为正或恒为负时，函数 $y = \frac{1}{f(x)}$ 与

$y = f(x)$ 的单调性相反

③函数 $f(x)$ 恒为非负时，函数 $y = \sqrt{f(x)}$ 与 $y = f(x)$ 的单调性相同

函数单调性判断方法五：

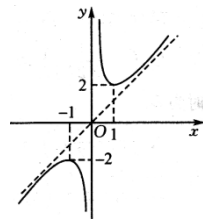
利用下面一些结论直接判断：(小题中使用)

增 + 增 = 增 减 + 减 = 减 增 - 减 = 增 增 = 增

函数单调性判断方法六：

如果遇到的是函数 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (对钩函数)，

可直接利用图象(双钩线)得到它的单调性，如下图， $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上单增，在 $(-1, 0)$, $(0, 1)$ 上单减。



★特别地，形如 $f(x) = x + \frac{k}{x}$ 的函数图象都类似对钩函数，只是当 $x = \sqrt{k}$ 时，图象右半支取最小值 $2\sqrt{k}$ ，当 $x = -\sqrt{k}$ 时，图象左半支取最大值 $-2\sqrt{k}$ 。

复合函数单调性判断方法七：

复合函数单调性的判断法则：“同增异减”

【例一】函数 $y = \sqrt{x-2} - \frac{1}{x+2}$ 的值域为 _____。

【例二】(1) 作出函数 $y = -x^2 + 2|x| + 3$ 的图象，指出单调区间及值域。

(2) 作出函数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ 的图象，并指出函数 $f(x)$ 的单调区间。

【例三】函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$ 的单调递减区间为 ()

A. $(-\infty, -3]$

B. $(-\infty, -1]$

C. $[1, +\infty)$ D. $[-3, -1]$

【例四】 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ ，满足 $f(x+1) = -f(x)$ ，且在区间 $[-1, 0]$ 上为递增，则 ()

A. $f(3) < f(\sqrt{2}) < f(2)$ B. $f(2) < f(3) < f(\sqrt{2})$ C. $f(3) < f(2) < f(\sqrt{2})$ D. $f(\sqrt{2}) < f(2) < f(3)$

【例五】 (1) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对所有 $x \in [1, 2]$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(2) 函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 对所有 $a \in [1, 2]$ 恒成立，求 x 的取值范围.

【例六】 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，试判断函数 $F(x) = f[g(x)]$ 的奇偶性.

复合函数奇偶性判断方法四：

复合函数的奇偶性判断方法：“同奇则奇，一偶则偶”.

【例七】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 5, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, -2]$ C. $[-3, 0)$ D. $[-3, -2]$

【例八】 定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 2$,

且当 $a, b \in [-1, 1]$, $a + b \neq 0$ 时, $\frac{f(\frac{2}{3}a) + f(\frac{1}{3}b)}{2a + b} > 0$.

(1) 判定函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 的单调性并加以证明;

(2) 若 $\frac{1}{2}f(x) \leq m^2 + 2am + 1$ 对所有 $x \in [-1, 1]$, $a \in [-1, 1]$ 恒成立，求 m 的取值范围.

必修第1册第四章：指数函数与对数函数

4.1.1 n 次方根与分数指数幂

【学习目标】

1. 理解 n 次方根的意义，会进行简单的求 n 方根的运算，掌握 $\sqrt[n]{a^n}$ 公式化简时对 n 奇偶性的讨论
2. 理解分数指数幂的概念，会进行分数指数幂与根式的互化
3. 会将整数指数幂的运算性质推广到有理数指数幂上来，能进行简单的幂的混合运算

【重点】 n 次方根的意义及 $\sqrt[n]{a^n}$ 公式的化简运算

【难点】 分数指数幂的概念与运算

【情景引入】

2010年10月6日，考古人员对在云南禄丰县新发现的恐龙化石进行清理、研究。这具化石为单体恐龙骨架化石，整体形态较为完整。据考古人员推断，这种恐龙体长约1.2米，身高在0.7至0.8米之间，生活在距今1.8亿年前，是新属新种恐龙。目前，这种恐龙的定种定名工作正在进行中。



同学们，你们知道考古的人挖到古物、化石是怎么推断它的时间，年代的吗？

其实，在考古学中测定生物死亡年代，一般采用碳14放射性测年法。经研究发现，含C物质的C14含量在C元素中所含的比例几乎是保持恒定的，如果含C物质一旦停止与大气的交换关系，则该物质的C14含量不在得到新的补充，而原有的C14按照衰变规律减少，每隔5730年减少一半（这个时间称为“半衰期”），因此只要测出含C物质中C14的减少的程度，就可以计算出它停止与大气进行交换的年代，这就是C14测年的原理。

根据此规律，人们获得了生物体内碳14含量 P 与死亡年数 t 之间的关系

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \quad (t \in \mathbb{N})$$

当生物死亡了 5730, 2×5730 , 3×5730 , ... 年后，它体内碳14的含量 P 分别为 $\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ...

当生物死亡了 6000, 10000, 1.8 亿, ... 年后，它体内碳14的含量 P 分别为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6000}{5730}}$, _____, _____, ...

★问题1: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6000}{5730}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{10000}{5730}}$ 的意义是什么呢？

复习巩固：

1. 整数指数幂的概念：

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ 个 } a} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$a^0 = 1 (a \neq 0); \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$$

2. 运算性质：

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$(a^m)^n = a^{mn} (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n (n \in \mathbb{Z})$$

3. 注意

$$\textcircled{1} \quad a^m \div a^n \text{ 可看作 } a^m \cdot a^{-n},$$

$$\therefore a^m \div a^n = a^m \cdot a^{-n} = a^{m-n}$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n \text{ 可看作 } a^n \cdot b^{-n}, \therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n = a^n \cdot b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$$

4. 根式：

$\sqrt{a}$ 是 a 的算术平方根，且有 $a \geq 0$ 。

【练习1】 $\sqrt{9} = \underline{\quad}$ ； $\sqrt{16}$ 的平方根为 $\underline{\quad}$ 。

若 $x^2 = 9$ ，则 $x = \underline{\quad}$ ，我们称它为 9 的平方根；

若 $x^3 = -125$ ，则 $x = \underline{\quad}$ ，我们称它为 -125 的 3 次方根（立方根），

类似地，由于 $2^5 = 32$ ，我们称 2 为 32 的 5 次方根。

一般地，若 $x^n = a (n > 1, n \in \mathbb{N}^*)$ 则 x 叫做 a 的 n 次方根。

★问题2: 对于上述定义中 a 一定为非负数吗？
负数在什么情况下有 n 次方根？

非负数的 n 次方根一定唯一吗? _____

当 n 为奇数时, a 的 n 次方根为 $\sqrt[n]{a}$,且 $\sqrt[n]{a}$ 与 a 的正负号相同;

当 n 为偶数时, $a(a \geq 0)$ 的 n 次方根为_____,
负数没有偶次方根.

($\sqrt[n]{a}$ 叫做根式, n 叫做根指数, a 叫做被开方数)

特别地,0的任何次方根都是0,记作 $\sqrt[n]{0}=0$.

根据定义, $(\sqrt[n]{a})^n=a$,如 $(\sqrt[3]{27})^3=27$,

$(\sqrt[5]{-32})^5=-32$.

★问题3: $\sqrt[n]{a^n}$ 表示 a^n 的 n 次方根,等式 $\sqrt[n]{a^n}=a$ 一定成立吗? 如果不一定成立,那么 $\sqrt[n]{a^n}$ 等于什么?

答: _____,

例如: $\sqrt{(-5)^2}=\underline{\hspace{1cm}}$, $\sqrt{(5)^2}=\underline{\hspace{1cm}}$.

$\sqrt[3]{(-3)^3}=\underline{\hspace{1cm}}$, $\sqrt[3]{3^3}=\underline{\hspace{1cm}}$.

当 n 为奇数时, $\sqrt[n]{a^n}=a$;

当 n 为偶数时, $\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a(a \geq 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$.

【例一】求值填空:

① $\sqrt[3]{(-a)^3}=\underline{\hspace{1cm}}$; ② $\sqrt{(-10)^2}=\underline{\hspace{1cm}}$;

③ $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=\underline{\hspace{1cm}}$; ④ $\sqrt[4]{x^4}-\sqrt[4]{y^4}=\underline{\hspace{1cm}}$;

⑤ 已知 $m < \frac{2}{3}$, 则化简 $\sqrt[4]{(3m-2)^2}=\underline{\hspace{1cm}}$;

⑥ 化简: $(\sqrt{x-1})^2 + \sqrt[3]{(1-x)^3} + \sqrt[4]{(x-1)^4}$.

【例二】(1) 下列各式正确的是()

A. $(\sqrt[3]{a})^3=a$ B. $(\sqrt[4]{7})^4=-7$

C. $(\sqrt[5]{a})^5=|a|$ D. $\sqrt[6]{a^6}=a$

(2) 当 $a>0$ 时, $\sqrt{-ax^3}=(\quad)$

A. $x\sqrt{ax}$

B. $x\sqrt{-ax}$

C. $-x\sqrt{-ax}$

D. $-x\sqrt{ax}$

【探究】分数指数幂的意义

引例: $a>0$ 时, $\sqrt[5]{a^{10}}=\sqrt[5]{(a^2)^5}=a^2=a^{\frac{10}{5}}$,

则类似可得 $\sqrt[3]{a^{12}}=\underline{\hspace{1cm}}$;

$\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{(a^{\frac{2}{3}})^3}=a^{\frac{2}{3}}$, 类似可得 $\sqrt{a}=\underline{\hspace{1cm}}$.

规定分数指数幂如下

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ ($a>0, m, n \in \mathbb{N}^*, n>1$);

$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ($a>0, m, n \in \mathbb{N}^*, n>1$).

★问题4: 你现在知道 $(\frac{1}{2})^{\frac{6000}{5730}}$ 的意义是什么吗?

答: $(\frac{1}{2})^{\frac{6000}{5730}}=\underline{\hspace{1cm}}$

【练习2】(1) 将下列根式写成分数指数幂形式:

$\sqrt[2]{3^5}=\underline{\hspace{1cm}}$; $\sqrt[3]{5^4}=\underline{\hspace{1cm}}$;

$\sqrt{a^m}=\underline{\hspace{1cm}}$ ($a>0, m \in \mathbb{N}^*$).

(2) $5^{\frac{4}{5}}=(\quad)$

A. $5^{\frac{5}{4}}$

B. $\frac{1}{\sqrt[4]{5^5}}$

C. $\sqrt[5]{5^4}$

D. $\frac{1}{\sqrt[5]{5^4}}$

(3) 若 $\sqrt[6]{6-x}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围为_____.

(4) 计算: $(2\frac{3}{5})^0 + 2^{-2} (2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} - (0.01)^{0.5}=\underline{\hspace{1cm}}$.

【例三】 $(\sqrt[3]{6\sqrt{a^9}})^4 (\sqrt[6]{3\sqrt[3]{a^9}})^4$ 等于()

A. a^{16}

B. a^8

C. a^4

D. a^2

【例四】用分数指数幂的形式表示下列各式($b>0$):

(1) $a^3 \sqrt[3]{a^2}$;

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x(\sqrt[5]{x^2})^2}}$ ($x \neq 0$);

(3) $\sqrt{\sqrt{\frac{b^3}{a}} \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}} (a>0, b>0)$;

(4) $\sqrt{a^{-4} b^2 \sqrt[3]{ab^2}} (a>0, b>0)$.

4.1.2 无理指数幂及其运算性质

【学习目标】

1. 了解无理指数幂的概念,知道无理指数幂可以用有理指数幂来逼近的思想方法
2. 会将整数指数幂的运算性质推广到实数指数幂上来,并能进行简单的幂的混合运算
3. 体会无限逼近思想和整体思想在数学中的妙用,感受数学学习过程中的乐趣

【重点】 无理指数幂的概念与实数指数幂的运算

【难点】 无理指数幂含义中无限逼近思想的理解

【复习引入】

上节课我们一起学习了分数指数幂的概念,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \quad (a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*, n > 1)$$

特别地, 0 的正分数指数幂等于 _____,
0 的负分数指数幂没有意义.

【练习】 将下列根式写成分数指数幂的形式:

$$\sqrt[3]{5^2} = \quad, \quad \sqrt[2]{5^3} = \quad$$

★问题 1: 上面, 我们将指数的取值范围由整数推广到了有理数, 那么, 当指数是无理数时, 比如 $5^{\sqrt{2}}$, 我们又应当如何理解它呢?

【探究】无理数指数幂的意义

我们知道 $\sqrt{2} = 1.414\ 213\ 56\cdots$, 它是一个确定的数, 事实上, $5^{\sqrt{2}}$ 也表示一个确定的实数, 而 $5^{\sqrt{2}}$ 的大小是如何确定的呢? 观察下表:

$\sqrt{2}$ 的不足近似值	从小于 $\sqrt{2}$ 的方向逼近 $\sqrt{2}$ 时 $5^{\sqrt{2}}$ 的近似值	从大于 $\sqrt{2}$ 的方向逼近 $\sqrt{2}$ 时 $5^{\sqrt{2}}$ 的近似值	$\sqrt{2}$ 的过剩近似值
1.4	9.518 269 694	11.180 339 89	1.5
1.41	9.672 669 729	9.829 635 328	1.42
1.414	9.735 171 039	9.750 851 808	1.415

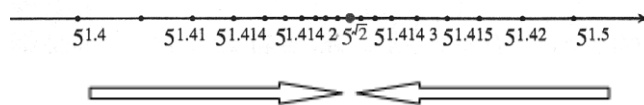
1.414 2	9.738 305 174	9.739 872 62	1.414 3
1.414 21	9.738 461 907	9.738 618 643	1.414 22
1.414 213	9.738 508 928	9.738 524 602	1.414 214
1.414 213 5	9.738 516 765	9.738 518 332	1.414 213 6
1.414 213 56	9.738 517 705	9.738 517 862	1.414 213 57
1.414 213 562	9.738 517 736	9.738 517 752	1.414 213 563
...	...	...	...

【思考 1】: 观察上面两个图表, 你能发现 $5^{\sqrt{2}}$ 的大小可以通过怎样的途径来得到呢?

由上表不难发现:

当 $\sqrt{2}$ 的不足近似值从小于 $\sqrt{2}$ 的方向逼近 $\sqrt{2}$ 时, $5^{\sqrt{2}}$ 的近似值从小于 $5^{\sqrt{2}}$ 的方向逼近 $5^{\sqrt{2}}$;当 $\sqrt{2}$ 的过剩近似值从大于 $\sqrt{2}$ 的方向逼近 $\sqrt{2}$ 时, $5^{\sqrt{2}}$ 的近似值从大于 $5^{\sqrt{2}}$ 的方向逼近 $5^{\sqrt{2}}$.

因此, $5^{\sqrt{2}}$ 就是一串有理指数幂 $5^{1.4}, 5^{1.41}, 5^{1.414}, 5^{1.4142}, \cdots$ 和另一串有理数指数幂 $5^{1.5}, 5^{1.42}, 5^{1.415}, 5^{1.4143}, \cdots$ 按上述变化规律变化的结果 (这个过程可以用下图表示)



所以, $5^{\sqrt{2}}$ 确实是一个确定的实数, 在精确度要求不高的情况下, 我们可以用 $5^{1.414}$ 作为它的近似值.

【思考 2】: 上面的这种思想在以前的数学学习过程中接触过吗?

【无限逼近思想举例】

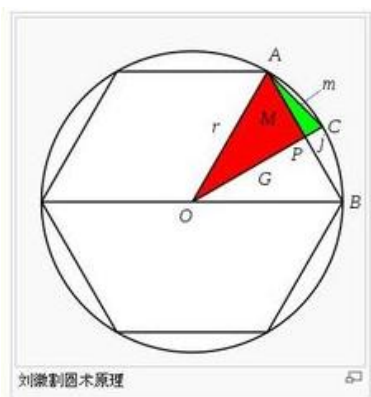
如: 1、0. 0.9999 $\dot{9}$ _____ 1 (比较大小).

2、《庄子·天下篇》中提出: “一尺之捶, 日取其半, 万世不竭.”

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

3、刘徽 (三国时代数学家) 割圆术: 他说: “割之弥细, 所失弥少. 割之又割, 则与圆合体, 而无所失矣.”

意思是：越割越细，多边形和圆面积的差越小. 如此割了再割，最后终于和圆合为一体，毫无差别了.



这充分体现了刘徽用多边形的面积无限逼近圆面积的数学思想.

【思考 3】：参照上述探究过程，请你说明无理数指数幂 2^π 的含义.

这样一来，我们将指数幂的概念推广到了实数指数幂上 (Perfect!)，而且整数指数幂的运算性质对于实数指数幂也同样适用 (Very Perfect!)，即对于任意实数 m, n ，均有下面的运算性质：

- (1) $a^m a^n = a^{m+n}$ ($a > 0, m, n \in \mathbf{R}$);
- (2) $(a^m)^n = a^{mn}$ ($a > 0, m, n \in \mathbf{R}$);
- (3) $(ab)^m = a^m b^m$ ($a > 0, b > 0, m \in \mathbf{R}$)

【练习 1】(1) 计算 $\left[(-\sqrt{2})^{-2}\right]^{\frac{1}{2}}$ 的结果是 ().

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) 化简 $(-x)^2 \sqrt{-\frac{1}{x}}$ 的结果是 ()

- A. $\sqrt{x}$ B. $-x\sqrt{-x}$
C. $x\sqrt{x}$ D. $x\sqrt{-x}$

【例一】计算下列各式：

- (1) $(3\sqrt[3]{2\sqrt{2}})^3 \sqrt{2}$; (2) $\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{\pi\sqrt{3}}}\right)^2 \sqrt{3}$.

【例二】已知 $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ ，试求出下列各式的值.

- ① $a + a^{-1}$; ② $a^2 + a^{-2}$; ③ $\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 3}{a^2 + a^{-2} - 2}$.

【点评】：常用变形公式有：

$$x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2 = (x - x^{-1})^2 + 2;$$

$$(x - x^{-1})^2 = (x + x^{-1})^2 - 4;$$

$$x^1 + x^{-1} = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 - 2.$$

$$x^3 + x^{-3} = (x + x^{-1})(x^2 - 1 + x^{-2}) = (x + x^{-1})((x + x^{-1})^2 - 3)$$

【例三】(1) 已知 $x + y = 10$, $xy = 9$, 且 $x < y$, 求 $\frac{x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$ 的值.

(2) 若 $a + b = m^{\frac{1}{3}}$, $ab = \frac{1}{6}m^{\frac{2}{3}}$ ($m > 0$), 则 $a^3 + b^3$ 的值为 ()

- A. 0 B. $\frac{m}{2}$ C. $-\frac{m}{2}$ D. $\frac{3m}{2}$

【例四】(1) (多选题) 下列结论中不正确的是 ()

- A. 当 $a < 0$ 时 $(a^2)^{\frac{3}{2}} = a^3$
B. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$
C. 函数 $y = (x-2)^{\frac{1}{2}} - (3x-7)^0$ 的定义域是 $[2, +\infty)$
D. 若 $100^a = 5, 10^b = 2$, 则 $2a + b = 1$

(2) 已知 $a^{2m+n} = 2^{-2}$, $a^{m-n} = 2^8$, $a > 0$, 且 $a \neq 1$, 则 a^{4m+n} 的值为_____.

(3) 设 α, β 为方程 $2x^2 + 3x + 1 = 0$ 的两个根，则 $\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha+\beta} =$ _____.

(4) 化简：

$(1 + 2^{-\frac{1}{32}})(1 + 2^{-\frac{1}{16}})(1 + 2^{-\frac{1}{8}})(1 + 2^{-\frac{1}{4}})(1 + 2^{-\frac{1}{2}})$ 的结果是 ()

- A. $\frac{1}{2}(1 - 2^{-\frac{1}{32}})$ B. $\frac{1}{2}(1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$
C. $(1 - 2^{-\frac{1}{32}})^{-1}$ D. $\frac{1}{2}$

4.2.1 指数函数的概念与图象

【学习目标】

1. 理解指数函数的定义，会用描点法绘制指数函数的图象
2. 掌握指数函数图象的简单性质，理解指数函数单调性与底数的关系，会用指数函数单调性进行幂的大小比较
3. 经历观察函数图象、归纳函数性质的过程，培养归纳总结的思维能力，培养创新意识

【重点】 指数函数的图象、性质及简单应用

【难点】 指数函数图象和性质的发现过程，及指数函数图象与底的关系

【情境引入】

大家拿出一张纸，对折一次得两层，对折两次得4层，对折3次得8层，对折4次得16层，假设可以这样一直折下去，当折叠30次后，你们猜猜估计能有多厚呢？

【思考1】 通过刚才这个问题的了解，你有什么感受？

★问题1：把刚才的折纸次数记为 x （次），所得到的层数为 y ，则对每一个 x 的取值都有唯一确定的 y 与之对应，即 y 与 x 满足函数关系，那么解析式是什么？

答：解析式为_____①

前面我们刚学习过：生物体内碳14含量 P 与死亡年数 t 之间的关系如下

$$P = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \quad (t \in \mathbb{N})$$

若设 $\frac{t}{5730} = x$ ，则可以得到函数的解析式为

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad (x \in \mathbb{R}) \dots\dots\dots ②$$

★问题2：观察上面的解析式①和②，它们有什么特征？

一般地，函数 $y = a^x$ （其中 a 为常数， $a > 0$ 且

$a \neq 1$ ）叫做指数函数。其中指数 x 是自变量，定义域是 $\mathbb{R}$ 。

【思考2】 为何规定 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ？【思考3】 $y = x^2$ 是指数函数吗？ $y = 3^{x+1}$ 呢？

【练习1】 下列函数不是指数函数的是（ ）

A. $y = 4^x$

B. $y = 0.4^x$

C. $y = (-4)^x$

D. $y = 4^{-x}$

【练习2】函数 $y = (2a^2 - 3a + 2)a^x$ 是指数函数，则 a 的值_____。

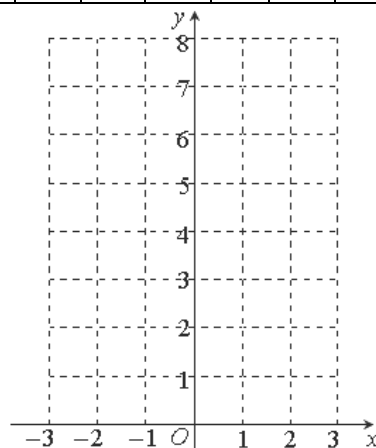
【练习3】已知指数函数 $f(x) = a^x$ （ $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ）的图象经过点 $(2, 3)$ ，求 $f(0)$ ， $f(4)$ 的值。

★问题3：为了对指数函数做更深入的了解，该怎样来研究指数函数呢？又该研究指数函数的什么？

【探究】 指数函数的图象及其性质

首先我们作出函数 $y = 2^x$ 的图象：列表、描点、连线（三部曲）

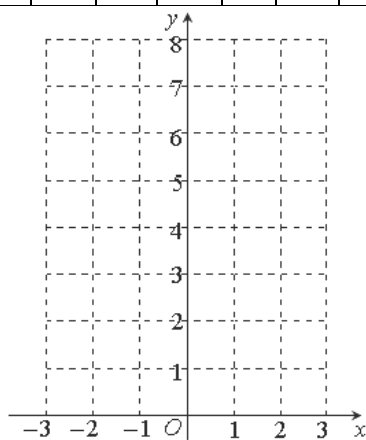
x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = 2^x$		0.35		0.71		1.41		2.83	



在上图中继续作出函数 $y = 3^x$ 的图象。

接下来我们继续作出函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象：

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$			2		1		$\frac{1}{2}$		



在上图中继续作出函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象.

★问题 4: 认真观察上面四个图象, 其中 $y = 2^x$ 和 $y = 3^x$ 的图象有什么共同特征? $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象呢?

答: (1) $y = 2^x$ 和 $y = 3^x$ 的图象的共同特征:

(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的图象的共同特征:

★问题 5: 指数函数图象的增或减与哪个量有关? 又有何关系?

答: _____

归纳出指数函数的性质:

图		
象		
定义域		
值域		
性		

质

【练习 4】若函数 $f(x) = (2a+1)^x$ 是减函数, 则 a 的取值范围是_____.

【例一】(1) 当 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $f(x) = a^{x-2} - 3$ 必过定点_____.

(2) 函数 $y = \sqrt{1-3^x}$ 的定义域是()

- A. $[0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0]$
C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, +\infty)$

(3) 函数 $f(x) = 3^{x-3}$ ($1 < x \leq 5$) 的值域是(C)

- A. $(0, +\infty)$ B. $(0, 9)$
C. $\left(\frac{1}{9}, 9\right]$ D. $\left(\frac{1}{3}, 27\right]$

(4) 函数 $y = \sqrt{a^x - 1}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的定义域是 $(-\infty, 0]$, 则实数 a 的取值范围为_____.

【例二】(1) 指数函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(\pi, \sqrt{2})$, 则 $f(-\pi) =$ _____.

(2) 指数函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $(-2, \frac{1}{4})$, 那么 $f(4) f(2) =$ _____.

【例三】比较下列各题中两个值的大小:

(1) $1.7^{2.5}$ _____ 1.7^3 ; (2) $0.8^{-0.1}$ _____ $0.8^{-0.2}$;

(3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{0.8}$ _____ $\left(\frac{1}{2}\right)^{1.8}$;

(4) $\left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{3}{7}}$ _____ $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{6}{15}}$;

(5) $1.7^{0.3}$ _____ $0.9^{3.1}$; (6) $0.8^{0.5}$ _____ $0.9^{0.4}$.

【点评】: 利用指数函数性质比较数的大小规律:
如果底数不同, 指数相同: 可以用幂函数的单调性比较;

如果底数相同, 指数不同: 可以利用指数函数图象的变化规律判断;

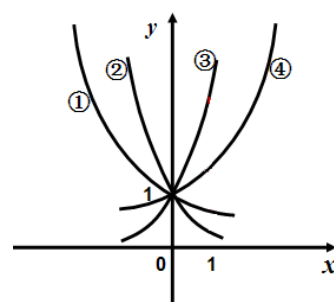
如果底数和指数都不同: 可考虑插入中间量, 进行分段比较。常用的中间量有 0 和 1. (放缩思想)

【例四】如图是指数函数: ① $y = a^x$; ② $y = b^x$;

③ $y = c^x$; ④ $y = d^x$ 的

图象, 则 a, b, c, d 与 1 的大小关系是()

- A. $a < b < 1 < c < d$
B. $b < a < 1 < d < c$
C. $a < b < 1 < d < c$
D. $1 < a < b < c < d$



4.2.2 指数函数图象及性质应用

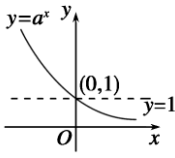
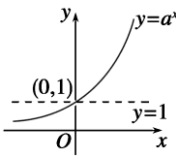
【学习目标】

1. 能根据指数函数图象得到它们的定义域、值域，会求由指数函数构造的复合函数的定义域和值域
2. 结合复合函数的单调性的判断方法求简单复合函数的单调区间和最值
3. 掌握指数函数图象性质的简单应用

【重点】 求复合函数的定义域、值域、单调区间和最值

【难点】 由复合函数到几个初等函数的拆分

【复习引入】

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
定义域		
值域		
性 质	恒过定点_____	
	在R上单调递_____	在R上单调递_____
	奇偶性：_____	

【热身小练习】

- 1、(多选题) 以 x 为自变量的四个函数中，是指数函数的为()

- A. $y=(\sqrt{3}+1)^x$ B. $y=-2 \cdot 3^x$
 C. $y=a^x$ D. $y=3^{-x}$
 E. $y=(2a-1)^x$ ($a>\frac{1}{2}$, 且 $a \neq 1$)

- 2、函数 $f(x)=3^{-x}-1$ 的定义域、值域分别是()

- A. 定义域是 $\mathbf{R}$, 值域是 $\mathbf{R}$
 B. 定义域是 $\mathbf{R}$, 值域是 $(0, +\infty)$
 C. 定义域是 $\mathbf{R}$, 值域是 $(-1, +\infty)$
 D. 以上都不对

- 3、若函数 $f(x)=a-\frac{2}{2^x+1}$ 是奇函数，则 a 的值为()

- A. 0 B. -1 C. 1 D. 2

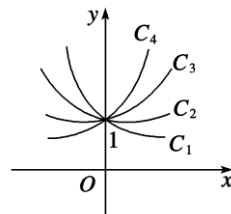
- 4、已知 $a=0.8^{0.7}$, $b=0.8^{0.9}$, $c=1.2^{0.8}$, 则 a, b, c 的大小关系是()

c 的大小关系是()

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$
 C. $c > b > a$ D. $c > a > b$

- 5、如图所示是指数函数的图象，已知 a 的取值 $\sqrt{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}$ ，则相应曲线 C_1, C_2, C_3, C_4 的 a 依次为()

- A. $\frac{4}{3}, \sqrt{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}$
 B. $\sqrt{2}, \frac{4}{3}, \frac{3}{10}, \frac{1}{5}$
 C. $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \sqrt{2}, \frac{4}{3}$
 D. $\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{3}, \sqrt{2}$



【例一】(1) 如果 $a>1, b<-1$, 那么函数 $y=a^x+b$ 的图象在()

- A. 第一、二、三象限 B. 第一、三、四象限
 C. 第二、三、四象限 D. 第一、二、四象限

(2) 定义运算 $a*b=\begin{cases} a(a \leq b) \\ b(b < a) \end{cases}$, 如 $1*2=1$, 则函数

$f(x)=2^x*2^{-x}$ 的值域是()

- A. $(0,1)$ B. $(0, +\infty)$
 C. $[1, +\infty)$ D. $(0,1]$

(3) 若函数 $f(x)=a^x-1$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 的定义域、值域都是 $[0,2]$, 则实数 a 的值为_____.

【例二】求下列函数的定义域和值域:

(1) $y=2^{\frac{1}{x-4}}$; (2) $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$.

(3) $y=3^{-\frac{1}{x}}-1$; (4) $y=\frac{1}{2^x-1}$.

【例三】试求下列函数的单调区间与值域.

$$(1) y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x-2}}; \quad (2) y = 2^{1+2x-x^2}.$$

【点评】：复合函数的单调性判断法则：“同增异减”.

【例四】设 $0 \leq x \leq 2$ ，求函数 $y = 4^{x-\frac{1}{2}} - 3 \cdot 2^x + 5$ 的最大值和最小值.

【例五】求 $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ 的定义域和值域，并写出其单调区间和奇偶性.

【例六】已知函数 $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x+7a-2 & (x < 1) \\ a^x & (x \geq 1) \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是_____.

【例七】已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2^x - 1} + \frac{1}{2}\right) \cdot x$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;

(2) 证明 $f(x) > 0$.

【例八】（重庆卷）已知定义域为 $\mathbb{R}$ 的函数

$f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$ 是奇函数.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若对任意的 $t \in \mathbb{R}$ ，不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立，求 k 的取值范围.

4.3.1 对数的概念

【学习目标】

1. 理解对数的概念，能熟练进行对数式与指数式的互化，会根据对数的概念求对数的值
2. 认识常用对数与自然对数的表示方法，掌握简单的对数运算

【重点】 对数概念及对数与指数的互化

【难点】 对数概念的理解，理解对数底的取值范围

【情景引入】

前面我们学习了指数函数及其图象性质，利用指数函数图象，我们可以很快求出任意 x 对应的函数值，同样的，我们也可以求出任意函数值 y 对应的自变量 x 的值.

如： $2^x=8 \Rightarrow x=$ _____ $3^x=9 \Rightarrow x=$ _____但是，如 $2^x=9 \Rightarrow x=?$ $3^x=8 \Rightarrow x=?$

★问题 1：已知底数和幂的值，如何求指数？

【探究 1】对数的概念与表示

一般地，如果 $a^x=N$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$)，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作

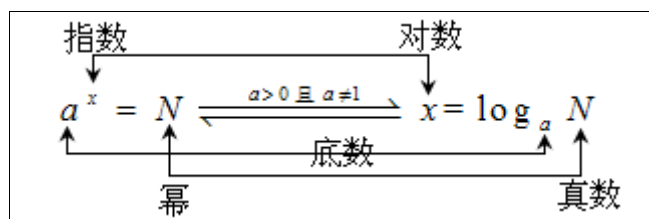
$$x = \log_a N$$

$$\log_a N$$

其中 a 叫做对数的底数， N 叫做真数.

★注释： 理解对数的定义要注意以下四点：

(1) 指数式与对数式之间的关系：

(2) 如何理解对数中底数 a 的取值范围：

对数的提出是针对指数式中已知幂，求指数的运算，对数式中的底数就是原指数式的底数，我们沿用了指数函数中底数 a 的取值范围的合理性，特规定 $a>0$ 且 $a \neq 1$.

【思考】任一指数式都可以化成对数式吗？如 $(-2)^3 = -8$ 可以化成对数式吗？答_____.

结论：负数和零没有对数. 即 $N > 0$.

(3) 对数常用恒等式：

根据对数的定义，对数 $\log_a N$ ($a>0$ 且 $a \neq 1$) 具有下列性质：

② $\log_a 1 =$ _____；

③ $\log_a a =$ _____；

④ $a^{\log_a N} =$ _____ . ($a>0$ 且 $a \neq 1$, $N>0$)

(4) 了解常用对数与自然对数表示方法：

我们将以 10 为底的对数叫做_____，并把 $\log_{10} N$ 简记为_____. 另外，在科学技术中常使用以无理数 $e \approx 2.71828 \dots$ 为底数的对数，我们把以自然常数 e 为底的对数称_____，并且把 $\log_e N$ 简记为_____.

例如： $\lg 10 = 1$, $\lg 100 = 2$, $\lg 0.01 = -2$; $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln e^2 = 2$.

【练习 1】 将下列指数式化为对数式，对数式化为指数式：

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^m = 5.73$ ；化成对数式为：_____

(2) $2^{-6} = \frac{1}{64}$ ；化成对数式为：_____

(3) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ ；化成指数式为：_____

(4) $\lg 0.01 = -2$ ；化成指数式为：_____

(5) $\ln 10 = 2.303$. 化成指数式为：_____

【练习 2】求下列各式中 x 的值.

$$(1) \log_{64} x = -\frac{2}{3}; \quad (2) \log_3(\log_4 x) = 1;$$

$$(3) \lg 100 = x; \quad (4) -\ln e^2 = x.$$

【练习 3】对数式 $\log_{(a-2)}(5-a) = b$ 中, 实数 a 的取值范围是()

- A. $(-\infty, 5)$ B. $(2, 5)$
C. $(2, +\infty)$ D. $(2, 3) \cup (3, 5)$

★问题 2: 通过刚才的探究, 我们学习了对数的概念, 我们知道对数是由指数提出的, 那么, 我们是否可以由指数的运算性质导出对数的运算性质?

【探究 2】对数的运算性质

我们知道: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

写成对数式 $m+n = \underline{\hspace{2cm}}$ ①

如果设 $a^m = M$, $a^n = N$,

则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$

代入①式得:

于是, 我们得到如下的对数运算性质:

如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$, 那么:

$$(1) \log_a(M \cdot N) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2) \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(3) \log_a M^n = \underline{\hspace{2cm}} \quad (n \in \mathbb{R})$$

特别地, $\log_a a^n = \underline{\hspace{2cm}}$. ($a > 0$ 且 $a \neq 1$ 且 $n \in \mathbb{R}$)

【练习 4】若 $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$, $x > y$, 下列式子中错误的序号为 .

$$① \log_a x \cdot \log_a y = \log_a(x+y);$$

$$② \log_a x - \log_a y = \log_a(x-y);$$

$$③ \log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y};$$

$$④ \log_a(xy) = \log_a x \cdot \log_a y;$$

$$⑤ (\log_a x)^n = n \log_a x.$$

【练习 5】用 $\log_a x$, $\log_a y$, $\log_a z$ 表示下列各式:

$$(1) \log_a \frac{xy}{z}; \quad (2) \log_a \frac{x^2 \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}}.$$

【例一】求下列各式的值:

$$(1) \log_2(4^7 \times 2^5); \quad (2) \lg \sqrt[5]{100}.$$

$$(3) 3^{\log_3 5} + (\sqrt{3})^{\log_3 \frac{1}{5}}; \quad (4) \log_{(\sqrt{2}-1)} \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}.$$

【例二】解方程:

$$(1) \log_2(x^2 - 2) = 0; \quad (2) \log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x)] = 0;$$

【例三】计算下列各式的值:

$$(1) \frac{1}{2} \lg \frac{32}{49} - \frac{4}{3} \lg \sqrt{8} + \lg \sqrt{245};$$

$$(2) \frac{\lg \sqrt{2} + \lg 3 - \lg \sqrt{10}}{\lg 1.8}.$$

4.3.2 对数的运算

【学习目标】

1. 掌握对数的运算性质，能理解推导这些法则的依据和过程

2. 经历换底公式的推导过程，掌握换底公式的推广结论，学会换底公式及推导结论在解题中的应用

【重点】 换底公式及其结论的推导与应用

【难点】 对数性质的应用

【热身小练习】

1、 $\log_{\frac{1}{12}} 3 + 2\log_{\frac{1}{12}} 2 =$ _____;

2、 $3^{\log_3 4 - 2} =$ _____;

3、 $\frac{\lg 3 + 2\lg 2 - 1}{\lg 1.2} =$ _____;

4、 $\log_2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) + \log_2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) =$ _____;

5、 $(\log_2 3 + \log_8 9)(\log_3 4 + \log_9 8 + \log_3 2) =$ _____.

【复习引入】

以下 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $n \in \mathbb{R}$, $M, N > 0$.

(1) $a^x = N$ 化为对数式为_____

(2) $\log_a 1 =$ _____ ; $\log_a a =$ _____ ;

$a^{\log_a N} =$ _____ ; $\log_a a^n =$ _____.

(3) $\log_a (M \cdot N) =$ _____

$\log_a \left(\frac{M}{N}\right) =$ _____

$\log_a M^n =$ _____

$\log_a \sqrt[n]{M} =$ _____

【自主练习 1】 利用指数运算 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 推导对数运

算公式: $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$.

【例一】 求下列各式的值:

(1) $\lg \frac{3}{7} + \lg 70 - \lg 3$;

(2) $\frac{1 + \frac{1}{2} \lg 9 - \lg 240}{1 - \frac{2}{3} \lg 27 + \lg \frac{36}{5}}$;

(3) $\lg^2 2 + \lg 5 \cdot \lg 20 - 1$.

★问题: 对数的运算性质里有一个很重要的公式(换底公式): $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, ($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $c > 0$ 且 $c \neq 1$, $b > 0$), 你能根据对数的定义推导出这个公式吗?

【探究】 换底公式的推导过程

推导: 设 $\log_a b = M$, 则

对数的换底公式: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$,

($a > 0$ 且 $a \neq 1$, $c > 0$ 且 $c \neq 1$, $b > 0$)

★注释:

(1) 特别地, $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$ 或 $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$;

(2) 与换底公式有关的几个特殊结论:

$$\textcircled{1} \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$

$$\textcircled{2} \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c;$$

$$\textcircled{3} \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b.$$

〔练习 2〕若 $a > 0$, $a^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}$, 则 $\lg_{\frac{2}{3}} a =$ _____.

〔练习 3〕 $\textcircled{1} \frac{1}{\log_b a}$; $\textcircled{2} \frac{\lg b}{\lg a}$; $\textcircled{3} \log_{\sqrt{b}} \sqrt{a}$; $\textcircled{4}$

$\log_{a^n} b^n$; $\textcircled{5} \frac{1 - \log_{ab} a}{1 - \log_{ab} b}$; $\textcircled{6} \log_a c \log_c b$ (a, b, c 均

为不等于 1 的正数, 且 $ab \neq 1$, n 为正整数), 其中与 $\log_a b$ 相等的有_____.

〔练习 4〕利用对数的换底公式化简下列各式:

$$(1) \log_a c \cdot \log_c a;$$

$$(2) \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 2;$$

$$(3) (\log_4 3 + \log_8 3)(\log_3 2 + \log_9 2).$$

$$(4) \log_2 \frac{1}{125} \log_3 \frac{1}{32} \log_5 \frac{1}{3}.$$

【例二】(1) 已知 $2.5^x = 1000$, $0.25^y = 1000$, 求

$$\text{证: } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

(2) 已知 $2^x = 3$, $\log_4 \frac{8}{3} = y$, 则 $x + 2y$ 的值为()

A. 3 B. 8 C. 4 D. $\log_4 8$

(3) 已知 $2^a = 5^b = M$, 且 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = 2$, 则 M 的值是()

A. 20 B. $2\sqrt{5}$ C. $\pm 2\sqrt{5}$ D. 400

【例三】(1) 已知 $\lg 2 = 0.3010$, $\lg 3 = 0.4771$, 求 $\lg \sqrt{45}$.

(2) 已知 $\log_{18} 9 = a$, $18^b = 5$, 试用 a, b 表示 $\log_{36} 9$.

【例四】(1) 已知 $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, 则

$\log_2 \frac{x}{y}$ 的值为()

A. 0 B. 2 C. -2 D. 0 或 2

(2) 已知 $\log_a b + 3\log_b a = \frac{13}{2}$ ($a > b > 1$), 求

$$\frac{a+b^4}{a^2+b^2}.$$

(3) 解方程: $\log_2(x+1) - \log_4(x+4) = 1$.

4.4.1 对数函数的概念与图象

【学习目标】

1. 理解对数函数的定义，会用描点法绘制对数函数的图象
2. 掌握对数函数图象的简单性质，理解对数函数单调性与底数的关系，会用对数函数单调性进行对数的大小比较
3. 经历观察函数图象、归纳函数性质的过程，培养归纳总结的思维能力，培养创新意识

【重点】对数函数的图象、性质及简单应用

【难点】对数函数图象和性质的发现过程，及对数函数图象与底的关系

【情境引入】

在前面的课程我们学习了指数函数，而且我们知道指数函数中的 x 与 y 是一一对应的，如 $y = 2^x$ ，同时对于每一个 y 的值，也可以利用对数很快求出自变量 x 的值，而且这样的 x 是唯一确定的。

$$y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y$$

那就是说，上式是 x 关于 y 的一个函数。

既然也是函数，我们不妨用 x 表示自变量，用 y 表示因变量（即上式中的 y 改为 x ，而 x 改为 y ），得到如下函数形式：

$$y = \log_2 x$$

我们把这个函数称为对数函数。

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y \Rightarrow y = \log_a x \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$$

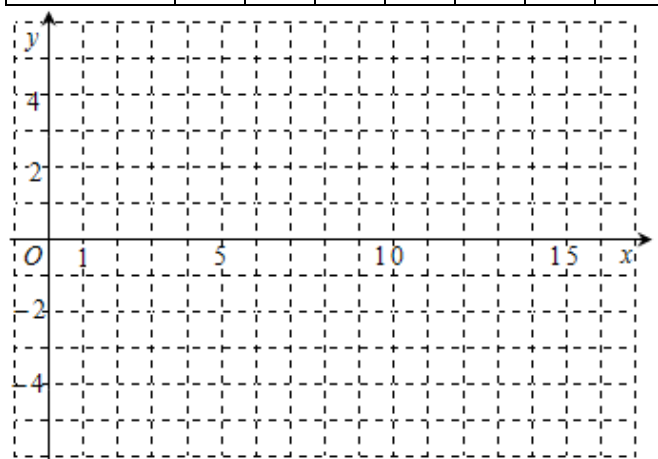
一般地，我们把函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 叫做_____，其中 x 是自变量，定义域为_____。

★问题 1：仿照指数函数的性质研究方法，你能自己归纳出对数函数的图象特征与性质吗？

【探究】对数函数的图象及其性质

首先我们作出函数 $y = \log_2 x$ 的图象：列表、描点、连线（三部曲）

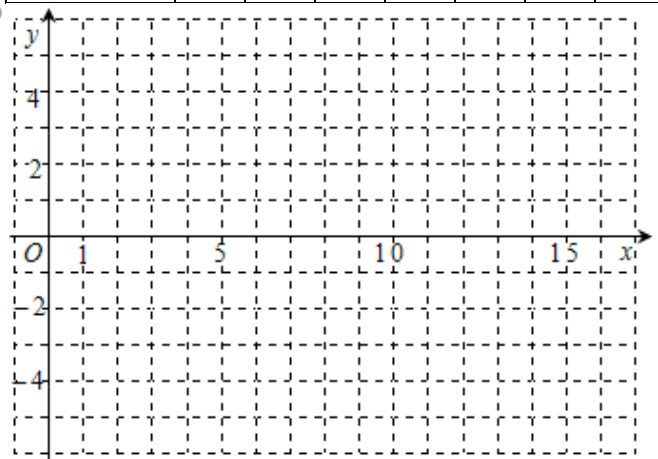
x	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_2 x$	-2	-1					



在上图中继续作出函数 $y = \log_3 x$ 的图象（红笔描绘）。

接下来我们继续作函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象：

x	0.25	0.5	1	2	4	8	16
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$							



在上图中继续作出函数 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象（红笔描绘）。

★问题 2：认真观察上面四个图象，其中 $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_3 x$ 的图象有什么共同特征？ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象呢？

答: (1) $y = \log_2 x$ 和 $y = \log_3 x$ 的图象的共同特征:

(2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 和 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 的图象的共同特征:

★问题 3: 对数函数图象的增或减与哪个量有关? 又有何关系?

答: _____

归纳出对数函数的性质:

图		
象		
定义域		
值域		
性质	恒过定点:	
	奇偶性:	

【练习 1】函数 $f(x) = \log_a(x-2) - 1$ 的图象恒过定点

【练习 2】若函数 $f(x) = \log_{(2a+1)}(x+1)$ 是减函数,

则 a 的取值范围是_____.

【思考】上面两图中的函数 $y = \log_2 x$ 的图象和函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象之间有什么关系? $y = \log_2 x$ 与

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 呢? 你能总结出什么规律?

【练习 3】比较下列各组数中两个值的大小:

(1) $\log_2 3.4$ _____ $\log_2 8.5$;

(2) $\log_{0.3} 1.8$ _____ $\log_{0.3} 2.7$;

(3) $\log_{a^2+1} 5.1$ _____ $\log_{a^2+1} 5.9$ ($a \neq 0$).

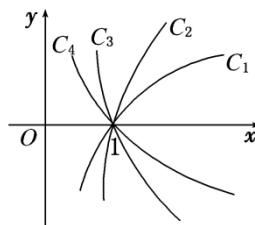
【例一】比较下列各组中两个值的大小:

(1) $\log_6 7$ 与 $\log_5 7$; (2) $\log_3 \pi$ 与 $\log_2 0.8$;

(3) $\log_2 3$ 与 $\log_5 6$.

【点评】: 利用对数函数性质比较数的大小时, 如果底数和真数都不同, 可考虑插入中间量, 进行分段比较. 常用的中间量有 0 和 1.

【例二】如图所示, 曲线是对数函数 $y = \log_a x$ 的图象, 已知 a 值取 $\sqrt{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{10}$, 则相应于



C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 的 a 值依次为_____.

【例三】求下列函数的定义域:

(1) $y = \frac{1}{\log_2 x}$; (2) $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x-3)}$;

(3) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{\log_{0.5}(x-1)}}$; (4) $y = \frac{\sqrt{\log_{0.8} x - 1}}{2x-1}$.

【例四】(1) 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 + ax + 1)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是_____.

(2) 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是()

- A. $(-\infty, -2)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(1, +\infty)$ D. $(4, +\infty)$

4.4.2 对数函数性质的应用

【学习目标】

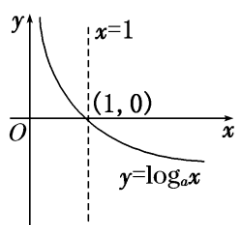
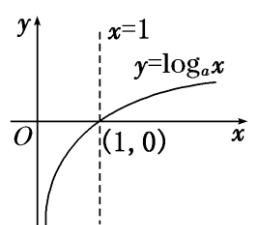
1. 巩固对数函数的概念，掌握对数函数定义域、值域的求法
2. 能对照指数函数的定义域、值域、相关性质来学习对数函数，并能找出它们相互间的联系和区别
3. 能结合对数函数图象理解它们的定义域、值域，会求由对数函数构造的复合函数的定义域和值域问题

【重点】 求复合函数的定义域、值域、单调区间、最值和奇偶性

【难点】 复合函数相关问题的求解

【复习引入】

对数函数的性质填空：

	$0 < a < 1$	$a > 1$
图 象		
定义域		
值域		
性 质	恒过定点_____	
	在 R 上单调递_____	在 R 上单调递_____
	奇偶性：_____	

【热身小练习】

1、(天津卷) 已知 $a = \log_3 3.$, $b = \log_4 3.2$,

$c = \log_4 3.6$, 则 ()

- A. $a > b > c$ B. $a > c > b$
C. $b > a > c$ D. $c > a > b$

2、已知函数 $y = 3 + \log_a(2x+3)$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象经过一个定点 P, 则 P 点的坐标为_____.

3、函数 $f(x) = \log_5(2x+1)$ 的单调递增区间是_____.

4、已知 $y = \log_a(2-ax)$ 在区间 $[0,1]$ 上是 x 的减函数, 则实数 a 的取值范围是_____.

【例一】 1、求下列函数的定义域:

(1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\log_2 x - 1}}$; (2) $y = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x+1)$.

【例二】 (1) 函数 $y = \ln(4+3x-x^2)$ 的单调递增区间是_____.

(2) 求函数 $f(x) = \log_{0.3}(3x^2 - 2x - 1)$ 的单调区间.

(3) 已知函数 $y = f(x)$ 的图象与 $g(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象关于 x 轴对称, 且 $g(x)$ 的图象过点 $(9, 2)$. 若 $f(3x-1) > f(-x+5)$ 成立, 求 x 的取值范围.

【例三】 (1) 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + 3a)$ 在

区间 $[2, +\infty)$ 上为减函数, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 4)$ B. $(-4, 4]$
C. $(-\infty, -4)$ D. $[-4, 2)$

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - (4a+1)x - 8a + 4 & (x < 1), \\ \log_a x & (x \geq 1), \end{cases}$ 若函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数, 则实数 $a =$ _____.

【例四】 已知 $f(x) = \lg(x^2 - ax + 1)$.

(1) 若 $f(x)$ 的定义域是 R , 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $f(x)$ 的值域是 R , 求实数 a 的取值范围.

【例五】(1)(全国卷) 若 $a = \frac{\ln 2}{2}$, $b = \frac{\ln 3}{3}$, $c = \frac{\ln 5}{5}$,

则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

(2) (多选题) 若 $0 < a < b < 1$, 则 ()

- A. $a^b < b^a$
B. $a^a b^b > a^b b^a$
C. $\log_a(1-a) < \log_b(1-b)$
D. $\log_a(1+b) > \log_b(1+a)$

【例六】 已知函数 $f(x) = (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - \log_{\frac{1}{4}} x + 5$, 求

在区间 $[2, 4]$ 上 $f(x)$ 的最大值与最小值.

【例七】 判断函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 的奇偶性和单调性.

【例八】 已知 $f(x) = \ln \frac{1-mx}{x-1}$ 是奇函数.

(1) 求 m ;

(2) 判断 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性, 并加以证明.

4.4.3 【探究与发现】对数函数与指数函数的关系

【复习引入】

回顾对数函数概念的引入：

$$y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y \Rightarrow y = \log_2 x$$

其中 $x = \log_2 y$ 是由指数式 $y = 2^x$ 得到的对数形式，它们两者在本质上是相同的，只不过：

在 $y = 2^x$ 中， x 为自变量， y 为因变量；

而在 $x = \log_2 y$ 中， y 为自变量， x 为因变量， x 为关于 y 的函数，这时我们就说函数 $x = \log_2 y$

($y \in (0, +\infty)$) 是函数 $y = 2^x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的反函数。

但在习惯上，我们通常用 x 表示自变量， y 表示函数，为此，我们常常对调函数 $x = \log_2 y$ 中的字母 x 、

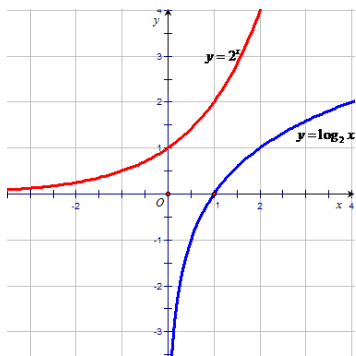
y ，把它写成 $y = \log_2 x$ ，这样，对数函数 $y = \log_2 x$

($x \in (0, +\infty)$) 是指数函数 $y = 2^x$ ($x \in \mathbb{R}$) 的反函数。

数。

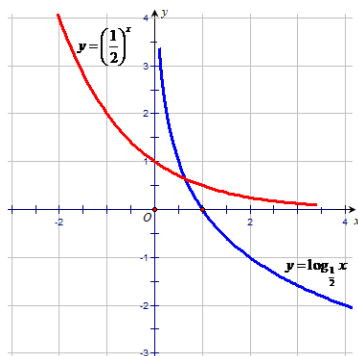
对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 和指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 互为反函数。

★问题 1：观察函数 $y = \log_2 x$ 的图象和函数 $y = 2^x$ 的图象（如下图），这两个函数图象之间有什么关系？你有什么发现？



〔思考〕函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象和函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的

图象之间也存在这种关系吗？那 $y = \log_a x$ 与 $y = a^x$ 之间呢？



结论 1： $y = a^x$ 的图象与 $y = \log_a x$ 的图象关于 轴对称。

★问题 2：除了指数函数与对数函数之间，其他的函数一定都有反函数吗？如二次函数 $y = x^2$ 有反函数吗？

结论 2：若函数 $y = f(x)$ 中的 x 与 y 满足 ，则 $y = f(x)$ 有反函数。

〔思考〕函数 $y = x^2$ ($x \in [0, +\infty)$) 有反函数吗？

如果有，它的反函数的解析式如何表示？

★问题 3：分析上述的互为反函数的两个函数之间的单调性，你有什么发现？

答：函数 $y = a^x$ 与函数 $y = \log_a x$ 的单调性 ；

函数 $y = x^2$ ($x \in [0, +\infty)$) 与它的反函数的单调性 。

结论 3：互为反函数的两个函数之间的单调性 。

反函数的定义：

一般地，设 A 和 B 分别为函数 $y = f(x)$ 的定义域和值域，如果由函数 $y = f(x)$ 所解得的 $x = \varphi(y)$ 也是

一个函数（即对任意的一个 $y \in B$ ，都有唯一确定的 $x \in A$ 与之对应），那么就称函数 $x = \varphi(y)$ 是函数 $y = f(x)$ 的反函数，记作 $x = f^{-1}(y)$ ($y \in B$)，其中 y 是自变量， x 是 y 的函数，但习惯上我们又常常改写成 $y = f^{-1}(x)$ ($x \in B$) 的形式。

函数 $x = f^{-1}(y)$ ($y \in B$) 与函数 $y = f^{-1}(x)$ ($x \in B$) 为同一函数，因为自变量的取值范围即定义域都是 B ，对应法则都为 f^{-1} 。

★注释：

- 1、符号 f^{-1} 是反函数的表示方法，是一个整体，并不是 -1 次方，这一定要注意；
- 2、反函数的定义域恰好是原函数的值域，而反函数的值域恰好是原函数的定义域；
- 3、并非所有函数都有反函数，只有一一对应的函数才有反函数；
- 4、互为反函数的两个函数的图象关于直线 $y = x$ 轴对称；（若点 (a, b) 在 $y = f(x)$ 的图象上，那么点 (b, a) 一定在 $y = f^{-1}(x)$ 的图象上。）
- 5、互为反函数的两个函数的图象的交点要么在 $y = x$ 上，要么成对的出现（关于 $y = x$ 对称）；
- 6、互为反函数的两个函数具有相同的单调性、奇偶性；
- 7、反函数的反函数就是原函数本身。

【练习一】求下列函数的值域。

$$(1) y = \frac{3x+1}{x+2}; \quad (2) y = \frac{1+2^x}{1-2^x}.$$

【例一】求下列函数的反函数：

$$(1) y = \log_{\frac{1}{6}} x; \quad (2) y = e^x;$$

$$(3) y = \frac{2x}{1+x}; \quad (4) y = \sqrt{x^2+1}+1 (x < 0).$$

【点评】：反函数的求解步骤：

步骤一：由 $y = f(x)$ 解出 $x = \varphi(y)$ ；

步骤二：把 x 和 y 的位置互换得 $y = f^{-1}(x) = \varphi(x)$ ；

步骤三：根据 $y = f(x)$ 的值域，写出 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域。

【例二】（1）（2021 全国 高一课时练习）函数

$f(x) = 2\log_4 x$ 与函数 $g(x) = 2^x$ 的图象（ ）

- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

（2）（辽宁卷）若函数 $y = f(x)$ 的反函数图象过点 $(1, 5)$ ，则函数 $y = f(x)$ 的图象必过点（ ）

- A. $(1, 1)$ B. $(1, 5)$ C. $(5, 1)$ D. $(5, 5)$

（3）若 $f(2x-1) = x+1$ ，则 $f^{-1}(2) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

（4）已知函数 $y = a^x + b$ 的图象过点 $(1, 4)$ ，其反函数的图象过点 $(2, 0)$ ，则 $a - b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

（5）（2021 上海浦东）函数 $f(x) = (x-1)^2 + 1 (x \leq 0)$ 的反函数为 $y = f^{-1}(x)$ ，则 $f^{-1}(5) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【例三】已知实数 a, b 满足 $2^a + a - 3 = 0$ ，

$\log_2 b + b - 3 = 0$ ，则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4.5.1 方程的根与函数的零点

【学习目标】

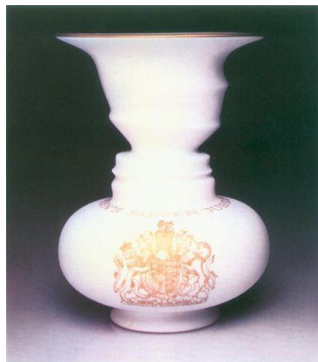
1. 理解函数零点的概念，掌握函数零点与方程根、图像与 x 轴交点横坐标之间的内在联系
2. 理解并会用零点存在性定理判断给定函数在某区间内是否有零点
3. 经历定理的探究过程，提高分析、研究、解决问题的能力，培养观察、抽象的概括能力，体会从特殊到一般的认识规律，体验化归与转化、数形结合、函数与方程这三大数学思想在解决数学问题时的意义与价值

【重点】理解函数零点的概念，掌握判定零点是否存在的方法（连续、异号）

【难点】根与零点之间的内在联系及探究发现函数零点存在的判定依据

【情景引入】

提问 1：观察下面左图图片你看到了什么？



提问 2：右图中你又看到了什么？如果换个角度来看呢？比如说倒过来？

上述的问题给你我们启示：要善于从不同的角度去观察、分析和研究问题，从不同的视角观察，会得到不同的结果。

★问题 1：式子 $y = 2x - 6$ 表示的是什么？

答：从方程角度看：_____

从函数角度看：_____

从图象角度看：_____

【思考】：对于 $y = 2x - 6$ ，令 $y = 0$ ，得 $2x - 6 = 0$ ，则 $x = 3$ 。这里的 3 与上式有何关系？

答：当 $x = 3$ 时，函数 $y = 2x - 6$ 的函数值为_____，

同时 3 也是相应的图象与 x 轴_____，我们把它简称为函数的零点。

★问题 2：仿照问题 1，你能否说说“什么叫函数 $y = f(x)$ 的零点”？

对于函数 $y = f(x)$ ，我们把使_____叫做函数 $y = f(x)$ 的零点。这样，函数 $y = f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的_____，也就是函数 $y = f(x)$ _____。

☆注：函数 $y = f(x)$ 有零点

$\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 图象与 x 轴有交点

$\Leftrightarrow$ 方程 $f(x) = 0$ 有实根。

【练习 1】函数 $f(x) = 4x - 6$ 的零点是()

A. $\frac{2}{3}$ B. $(\frac{3}{2}, 0)$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

【练习 2】求下列函数的零点：

(1) $f(x) = 3x + 2$ ； (2) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 。

【练习 3】若函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ 的零点是 2 和 -4，则 $a =$ _____， $b =$ _____。

★问题 3：不解方程，如何判断函数 $f(x) = x^2 + 2x - 6$ 是否有零点？

答：法一：

法二：

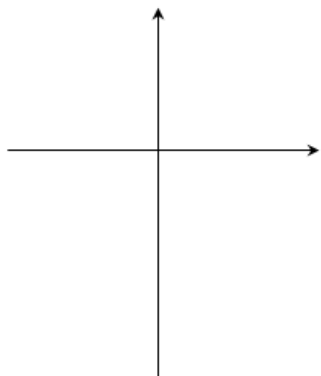
法三：

★问题 4：若把上式 $f(x) = 2^x + 2x - 6$ 中的 x^2 换成 2^x ，则得：函数 $f(x) = 2^x + 2x - 6$ 是否有零点？如何判断。

【引导探究】：方程 $2^x + 2^x - 6 = 0$ 的解用常规方法不便求出，怎么办？设法从函数本身去寻找突破口，能

否画出函数图象,利用图象观察?

x	$\cdots$	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
y	$\cdots$							$\cdots$



由图知:零点有_____个,在区间_____内.

【思考】:函数 $f(x)=2^x+2x-6$ 的图象有什么特征?

★问题 5: 若函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 连续, 且 $\begin{cases} f(1) < 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$, 那么 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 内有零点吗?

★问题 6: 若将上述区间推广到 $[a, b]$, 能否成立呢?

即: (1) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $\begin{cases} f(a) > 0 \\ f(b) < 0 \end{cases}$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内有零点吗?

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $\begin{cases} f(a) < 0 \\ f(b) > 0 \end{cases}$, 那么 $f(x)$ 在 (a, b) 内有零点吗?

零点存在性定理:

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象_____, 且_____, 则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点.

【练习 4】函数 $f(x)=x-2+\log_2 x$, 则 $f(x)$ 的零点所在区间为()

A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)

【练习 5】(教材习题改编) 已知函数 $f(x)$ 的图象是连续不断的, 且有如下对应关系:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	36.1	15.6	-3.9	10.8	-12.5	-23.0

函数 $f(x)$ 在哪几个区间内有零点?

答: _____

【练习 6】下列函数在相应区间内是否存在零点?

(1) $f(x)=3^x-x^2, x \in [-1, 0]$

(2) $f(x)=-x^3-3x+5, x \in [1, 2]$

【例一】判断下列结论是否正确, 若不正确, 请借助函数图象举出反例:

(1) 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 满足 $f(a)f(b)<0$, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内存在零点. ()

(2) 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)>0$, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内没有零点. ()

(3) 已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有且仅有一个零点. ()

反例:

★注: 1. 求函数 $y=f(x)$ 的零点, 若能求出对应方程 $f(x)=0$ 的实数根即可.

而当方程 $f(x)=0$ 的实数根不便求出、或用代数方法不好判定时, 可考虑用零点存在性定理来判定.

2. 利用零点存在性定理, 须同时满足两条:

① 函数图象连续;

② 区间两端点函数值异号.

强调: “连续”、“异号”, 缺一不可!

3. 满足零点存在性定理条件, 可断言有零点.

而零点可能有多少个呢? 何时仅有一个零点呢?

【例二】方程 $\ln x+2x=6$ 的解一定位于区间()

A. (1, 2) B. (2, 3) C. (3, 4) D. (4, 5)

【例三】作出函数 $f(x)=-x^3-3x+5$ 的图象, 并确定零点所在的区间 $(n, n+1) (n \in \mathbb{Z})$.

4.5.2 用二分法求方程的近似解

【学习目标】

1. 初步理解用“二分法”求方程近似解的思想方法，能够借助计算器用二分法求给定方程的近似解
2. 经历用二分法求方程近似解的过程，感受数学中“无限逼近”的思想，渗透从有限到无限的数学思想
3. 感受数学源于生活，并会用二分法思想解决其他的实际问题

【重点】 借助计算器用二分法求给定方程的近似解

【难点】 二分法中下一区间的确定与精确度的含义

【复习】

零点存在性定理：

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象_____，且_____，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点. 即存在 $x_0 \in (a, b)$ ，使得 $f(x_0)=$ _____，这个 x_0 也就是方程_____的_____.

【情境引入】

问题：方程 $\ln x + 2x - 6 = 0$ 有根吗？你能否求解这个方程的根的近似值？（精确度 0.1）

【方法引导】1、价格竞猜；2、电缆检修.

解：（方法一）求函数 $f(x) = \ln x + 2x - 6$ 的零点.

（方法二）用二分法求解（精确度 0.1）

次数	x	y	区间	区间中点值	中点函数值
1					
2					
3					

4					
5					
6					
7					
8					

通过上表格，我们可以得到该方程的近似解为_____.

对于在区间 $[a, b]$ 上_____ 且 _____ 的函数 $y=f(x)$ ，通过不断地把函数 $f(x)$ 的零点所在的区间_____，使区间的两个端点逐步_____，进而得到零点近似值的方法 叫做二分法。

给定精确度 ε ，用二分法求函数 $f(x)$ 零点近似值的步骤：

1. 确定区间 $[a, b]$ ，验证 $f(a) f(b) < 0$ ，给定精确度 ε ；

2. 求区间 (a, b) 的中点 $\frac{a+b}{2}$ ，记为 c ；

3. 计算 $f(c)$ ：

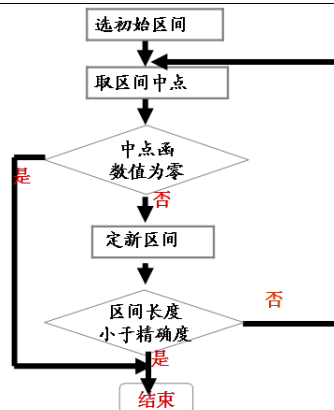
（1）若 $f(c) = 0$ ，则_____就是函数的零点；

（2）若 $f(a) \cdot f(c) < 0$ ，则零点在区间_____中；

（3）若 $f(c) \cdot f(b) < 0$ ，则零点在区间_____中.

对于上面的（2）（3）两种情形继续取中点判断.

4. 判断所得区间的长度是否小于精确度 ε ，即 $|a-b| < \varepsilon$ ，若满足则得到零点的近似解；否则重复步骤 2~4.



【例一】借助计算器或计算机用二分法求方程

$2^x + 3x = 7$ 的近似解(精确度 0.01).

解: 首先得到零点的初始区间_____.

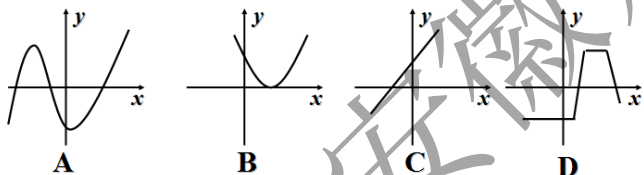
次数	x	y	区间	区间中点值	中点函数值
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

通过上表格, 我们可以得到该方程的近似解为_____.

【思考】零点的近似解只能是区间的端点 a 或 b 吗?

答: _____

【例二】(1) 以下每个图象表示的函数都有零点, 但不能用二分法求函数零点近似值的是(C)



(2) 用二分法求方程 $\lg x = 3 - x$ 的近似解, 可以取的初始区间是()

- A. (0,1) B. (1,2) C. (2,3) D. (3,4)

【例三】(1) 用二分法求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[2,4]$ 上的近似零点(精确度为 0.01), 验证 $f(2)f(4)<0$, 取区间 $[2,4]$ 的中点 $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$, 计算得 $f(2)f(x_1)>0$, 则此时零点 x_0 所在的区间是_____.

(2) 已知 $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ 在区间 $(1,2)$ 内有一个零点 x_0 , 若用二分法求 x_0 的近似值(精确度 0.2), 则最多需要将

区间等分的次数为()

- A. 3 B. 4
C. 5 D. 6

(3) 对于二分法求得的近似解, 精确度 ε 说法正确的是()

- A. ε 越大, 零点的精确度越高
B. ε 越大, 零点的精确度越低
C. 重复计算次数就是 ε
D. 重复计算次数与 ε 无关

【例四】(多选题) 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(0, a)$ ($a>0$) 上有唯一的零点, 在用二分法寻找零点的过程中, 依次确定了零点所在的区间为 $(0, \frac{a}{2})$, $(0, \frac{a}{4})$, $(0, \frac{a}{8})$, 则下列说法不正确的是()

- A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{16})$ 内一定有零点
B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{16})$ 或 $(\frac{a}{16}, \frac{a}{8})$ 内有零点, 或零点是 $\frac{a}{16}$
C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{a}{16}, a)$ 内无零点
D. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{16})$ 或 $(\frac{a}{16}, \frac{a}{8})$ 内有零点

【例五】用二分法求函数 $f(x) = 3^x - x - 4$ 的一个零点, 其参考数据如下:

$f(1.600\ 0) \approx 0.200$	$f(1.587\ 5) \approx 0.133$	$f(1.575\ 0) \approx 0.067$
$f(1.562\ 5) \approx 0.003$	$f(1.556\ 25) \approx -0.029$	$f(1.550\ 0) \approx -0.060$

据此数据, 可得 $f(x) = 3^x - x - 4$ 的一个零点的近似值(精确度 0.01)为_____.

【例六】在 26 枚崭新的金币中, 有一枚外表与真金币完全相同的假币(质量小一点), 现在只有一台天平(无砝码), 则应用二分法的思想, 最多称_____次就可以发现这枚假币.

必修第1册 第五章、三角函数

5.1.1 任意角

【学习目标】

1. 理解任意角的概念，区分并掌握正角、负角、零角
2. 掌握用集合来表示所有与 α 角终边相同的角(包括 α 角)
3. 掌握象限角的表示方法及其判断

【重点】理解正角、负角和零角的定义，掌握终边相同角的表示法

【难点】给定象限角判断半角所在的象限

【创设情境】你的手表慢了5分钟，你是怎样将它校准的？假如你的手表快了1.5小时，你应当如何将它校准？当时间校准以后，分针转了多少度？

★问题1：初中时，我们已学习了 $0^\circ \sim 360^\circ$ 角的概念，它是如何定义的呢？

(提示：初中角有图形定义与旋转定义两种)

★问题2：生活中有没有大于 360° 角的例子，你能列举一些吗？又该如何区分和表示这些角呢？

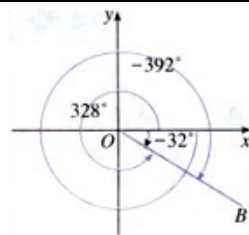
定义一：角的分类

- (1) 正角——按_____方向旋转所成的角；
- (2) 负角——按_____方向旋转所成的角；
- (3) 零角——_____重合的角。

(注：锐角的范围是_____, 钝角的范围是_____.)

定义二：把角放入直角坐标系中，应使角的顶点与_____重合，始边与_____重合，角的终边在第几象限，就说这个角是_____。

★问题3：如右下图，终边OB所表示的角是第几象限角？答：_____。以OB为终边的角是否唯一？如果不唯一，它们之间有什么关系？



★问题4：终边为OB的所有的角的集合可表示为_____。

结论一：与 α 终边相同的角的集合可表示为_____.即任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个_____的和。

【思考：你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗？】

★问题5：如果角 α 与角 β 的终边在同一直线上，如何表示两角间的关系？

答： $\beta =$ _____

★问题6：终边落在第一象限的角应该如何表示？

答：第一象限角：_____

第二象限角：_____

第三象限角：_____

第四象限角：_____

【例一】写出下列角的集合：

- (1) 终边落在y轴非正半轴的角的集合；
- (2) 终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合；
- (3) 终边落在第三象限的角的集合。

【例二】(1) 若手表时针走过4小时，则时针转过的角度为()

A. 120° B. -120°

C. -60° D. 60°

(2) -215° 是第_____象限角。

(3) 与 -500° 角的终边相同的最小正角是_____, 最大负角是_____.

(4) 终边在直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 上的角的集合 $S =$ _____.

【例三】下列命题正确的是()

- A. 终边与始边重合的角是零角
- B. 终边和始边都相同的两个角一定相等
- C. 在 $90^\circ \leq \beta < 180^\circ$ 范围内的角 β 不一定是钝角
- D. 小于 90° 的角是锐角

【例四】(1) 若角 α 与 β 的终边互为反向延长线, 则有()

- A. $\alpha = \beta + 180^\circ$
- B. $\alpha = \beta - 180^\circ$
- C. $\alpha = -\beta$
- D. $\alpha = \beta + (2k+1) \cdot 180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

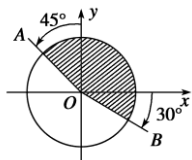
(2) (多选题) 下列条件中, 能使 α 和 β 的终边关于 y 轴对称的是()

- A. $\alpha + \beta = 90^\circ$
- B. $\alpha + \beta = 180^\circ$
- C. $\alpha + \beta = k \cdot 360^\circ + 90^\circ (k \in \mathbb{Z})$
- D. $\alpha + \beta = (2k+1) \cdot 180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

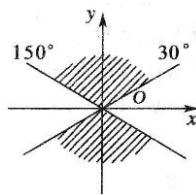
【例五】已知, 如右图所示,

(1) 分别写出终边落在 OA, OB 位置上的角的集合;

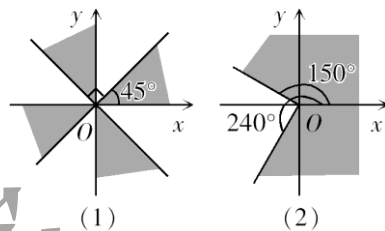
(2) 写出终边落在阴影部分(包括边界)的角的集合.



【变式 1】已知角 α 的终边在下图中阴影所表示的范围内 (不包括边界), 那么 $\alpha \in$ _____.



【变式 2】写出角 α 的终边在下图中阴影区域内角的集合 (包括边界).



【例六】已知 α 是第二象限角, 求 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

【变式 1】(全国 I) 已知 α 为第三象限角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限是()

- A. 第一或第二象限
- B. 第二或第三象限
- C. 第一或第三象限
- D. 第二或第四象限

【变式 2】 α 是第二象限角, 则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第_____象限角.

【例七】已知角 $\alpha = 2020^\circ$.

(1) 把 α 改写成 $k \cdot 360^\circ + \beta (k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \beta < 360^\circ)$ 的形式, 并指出它是第几象限角;

(2) 求 θ , 使 θ 与 α 终边相同, 且 $-360^\circ \leq \theta < 720^\circ$.

5.1.2 弧度制

【学习目标】

1. 了解弧度制的定义，领会弧度制定义的合理性，理解角的集合与实数集 R 之间建立的一一对应关系
2. 熟练地进行角度制与弧度制的换算
3. 掌握并运用弧度制表示的弧长公式、扇形面积公式

【重点】理解并掌握弧度制定义及运用，熟练地进行角度制与弧度制地互化换算

【难点】理解弧度制定义，弧度制的运用

【创设情境】最近，“2035 去台湾”歌曲火爆网络。有人问：福建到台湾有多远时，有人回答约 72 海里，但也有人回答约 133 公里，请问那一种回答是正确的？（已知 1 海里=1.852 千米(公里)）

★问题 1: 初中时角的度数是怎么定义的？还有其他的定义吗？

定义一：我们把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做_____，记作_____，或 1 弧度，或 1(单位可以省略不写)。

（注：如果角 α 是一个负数，那么它的弧度数是一个_____，零角的弧度数是_____，正角的弧度数是一个_____，且 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 。）

【思考】1 弧度跟半径的大小有关吗？为什么？

★问题 2: 1 弧度是什么意思？一周是多少弧度？半周呢？直角等于多少弧度？弧度制与角度制之间如何换算？（在下表格中填空）

	角度制	弧度制
定义	规定周角的_____为 1 度的角	把长度等于_____的弧所对的圆心角叫做_____的角.
表示方法	周角_____ 平角_____ 直角_____	周角_____rad 平角_____rad 直角_____rad

换算	(1) $360^\circ =$ _____rad, $180^\circ =$ _____rad $1^\circ =$ _____rad ≈ 0.01745 rad (2) $1 \text{ rad} =$ _____ $\approx 57.30^\circ$
----	---

★问题 3: 如果一个半径为 r 的圆的圆心角 α 所对的弧长是 l ，那么 α 的弧度数是多少？

结论一：角 α 的弧度数的绝对值是： $|\alpha| =$ _____，其中， l 是圆心角所对的弧长， r 是半径。

★问题 4: 你还记得初中学习的扇形的弧长与面积公式吗？

答：扇形的弧长公式： $l =$ _____ 面积公式： $S =$ _____

★问题 5: 利用角度制与弧度制的互换推导出弧长面积的弧度制运算公式：

结论二：如果扇形的弧长为 l ，半径为 r ，圆心角为 α ，则扇形的弧长 $l =$ _____，面积 $S =$ _____ = _____

【例一】填写下列特殊角的度数与弧度的对应表：

度	0°	30°	45°			120°	135°	150°			360°
弧度				$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$				π	$\frac{3}{2}\pi$	

（注：理解角的集合与实数集 R 之间建立的一一对应关系）

【例二】（1）下列转化结果错误的是（ ）

- A. $22^\circ 30'$ 化成弧度是 $\frac{\pi}{8}$
 B. $-\frac{10\pi}{3}$ 化成角度是 -600°
 C. -150° 化成弧度是 $-\frac{7\pi}{6}$
 D. $\frac{\pi}{12}$ 化成角度是 15°

（2）如果 $\alpha = -2$ ，则 α 的终边所在的象限为（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限
 C. 第三象限 D. 第四象限

（3）把 $157^\circ 30'$ 化成弧度为_____；

把 $-\frac{5}{12}\pi$ 化成角度制为_____.

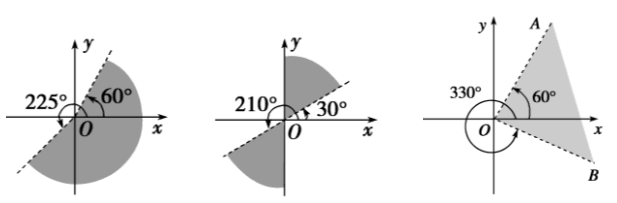
(4) 已知 $\theta \in \{\alpha | \alpha = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则 θ 的终边所在的象限是_____.

【例三】(1) (多选题) 与角 $\frac{9\pi}{4}$ 的终边相同的角的表达式中, 错误的是 ()

A. $2k\pi + 45^\circ, k \in \mathbb{Z}$ B. $k \cdot 360^\circ + \frac{9\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

C. $k \cdot 360^\circ - 315^\circ, k \in \mathbb{Z}$ D. $k\pi + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

(2) 用弧度表示终边落在如图所示的阴影部分内(不包括边界)的角的集合.



【例四】解答下列各题:

(1) 已知扇形的周长为 10cm, 面积为 4cm^2 , 求扇形圆心角的弧度数;

(2) 已知一扇形的圆心角是 72° , 半径等于 20cm, 求扇形的面积;

【例五】已知一扇形的周长 40cm, 当它的半径和圆心角取什么值时, 才能使扇形的面积最大? 最大面积是多少?

【变式 1】一个扇形的周长为 20, 当扇形的半径和圆心角各取何值时, 此扇形的面积最大? 最大面积是多少?

【变式 2】一个扇形的周长为定值 C , 当扇形的半径和圆心角各取何值时, 此扇形的面积最大? 最大面积是多少?

【例六】(1) 若弧度为 2 的圆心角所对的弦长为 2, 则这个圆心角所夹扇形的面积是 ()

A. $\tan 1$ B. $\frac{1}{\sin 1}$ C. $\frac{1}{\sin^2 1}$ D. $\frac{1}{\cos 1}$

(2) 一个半径为 R 的扇形, 它的周长是 $4R$, 则这个扇形所含弓形的面积是 ()

A. $\frac{1}{2}(2 - \sin 1 \cos 1)R^2$ B. $\frac{1}{2}R^2 \sin 1 \cos 1$
C. $\frac{1}{2}R^2$ D. $R^2 - R^2 \sin 1 \cos 1$

5.2.1 任意角的三角函数

【学习目标】

1. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义（包括这三种三角函数的定义域和函数值在各象限的符号）
2. 认识单位圆，借助三角形相似，理解在不同情景下三角函数定义的统一性
3. 理解并掌握诱导公式一，并学会使用公式一解题

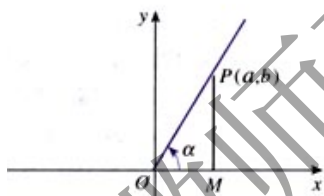
【重点】任意角三角函数的定义和诱导公式一

【难点】用角终边与单位圆的交点的坐标来刻画三角函数（及判断三角函数在各象限的符号）

【复习引入】我们初中时学过锐角的三角函数是如何定义的？

答： $\sin \alpha =$ $\cos \alpha =$ $\tan \alpha =$

★问题 1：如右图，把锐角 α 放入直角坐标系中，若终边上一点 P 的坐标为 (a, b) ，你能用点 P 的坐标表示角 α 的三角函数吗？



如图， $OP =$ _____
 $\sin \alpha = \frac{b}{OP} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos \alpha = \frac{a}{OP} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\tan \alpha = \frac{b}{a}$

★问题 2：对于确定的角 α ，这三个比值是否会随点 P 在 α 的终边上的位置的改变而改变呢？

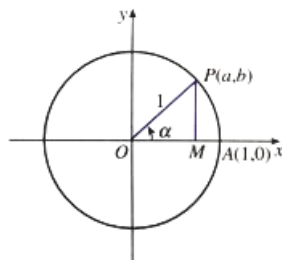
★问题 3：为了方便，移动点 P 使得 $OP=1$ ，此时角 α 的三角函数值又如何表示？

定义一：在直角坐标系中，我们称以原点 O 为圆心，以单位长度为半径的圆为单位圆。

定义二：如下图，已知单位圆与角 α 的终边交于点 P

(a, b) ，则 $\sin \alpha =$ _____, $\cos \alpha =$ _____, $\tan \alpha =$ _____.

★问题 4：上述锐角 α 的三角函数值可以用终边上一点的坐标表示。那么，角的概念推广以后，我们如何定义任意角的三角函数值呢？



定义三：如下图，设 α 是一个任意角，它的终边与单位圆交于点 $P(x, y)$ ，那么：

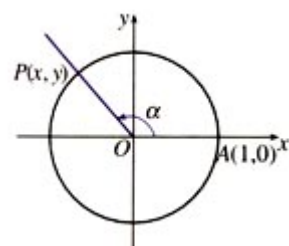
(1) y 叫做 α 的正弦 (sine)，记做 $\sin \alpha$ ，即 $\sin \alpha = y$ ；

(2) x 叫做 α 的余弦 (cosine)，记做 $\cos \alpha$ ，即 $\cos \alpha = x$ ；

(3) $\frac{y}{x}$ 叫做 α 的正切 (tangent)，记做 $\tan \alpha$ ，即

$\tan \alpha = \frac{y}{x} (x \neq 0)$. 【思考： $\tan \alpha$ 角 α 的取值范围？】

(注：当 α 是锐角时，此定义与初中定义相同（指出对边，邻边，斜边所在）；当 α 不是锐角时，也能够找出三角函数，因为，既然有角，就必然有终边，终边就必然与单位圆有交点 $P(x, y)$ ，从而就必然能够最终算出三角函数值.)



★问题 5：如果知道任意角 α 终边上一点，而这个点不是终边与单位圆的交点，该如何求它的三角函数值呢？

(注：三角函数是以角为自变量，以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数，又因为角的集合与实数集之间可以建立一一对应关系，故三角函数也可以看成实数为自变量的函数.)

【例一】已知 $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ ，求 $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha$ 的值.

【例二】已知角 α 的终边经过点 $(-4, -3)$ ，求角 α 的正弦、余弦和正切值.

【例三】(1)若角 α 的终边与单位圆的交点是 $P(x, \frac{2}{3})$ ，
则 $\sin \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\cos \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\tan \alpha = \underline{\hspace{1cm}}$.

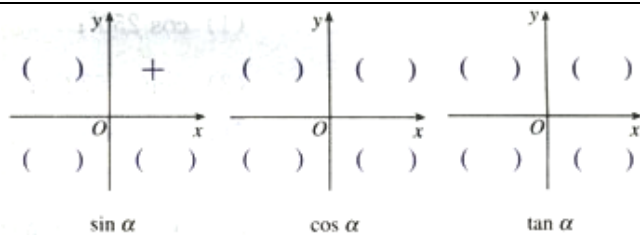
(2)已知角 α 的终边经过点 $P(-x, -6)$ ，且 $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ，则 $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\tan \alpha} = \underline{\hspace{1cm}}$.

(3)已知角 α 的终边在直线 $y = -3x$ 上，求 $10\sin \alpha + \frac{3}{\cos \alpha}$ 的值.

【例四】请根据任意角的三角函数定义，将这三种函数的值在各个象限的符号填入表格中：

函数	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限	备注
$\sin \alpha$					与 y 的符号一致
$\cos \alpha$					与 x 的符号一致
$\tan \alpha$					取决于 x, y 同号、异号

(注：记忆口诀：一全正，二正弦，三正切，四余弦)



★问题 6：根据三角函数的定义，终边相同的角的同一三角函数值有和关系？

终边相同的角的同一三角函数值相等. 即有公式一：

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha$$

【例五】已知 $\cos \theta \cdot \tan \theta < 0$ ，那么角 θ 是 ()

- A. 第一或第二象限 B. 第二或第三象限
C. 第三或第四象限 D. 第一或第四象限

【变式 1】(全国卷) 若 $\sin \alpha < 0$ ，且 $\tan \alpha > 0$ ，则 α 是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

【变式 2】设角 α 是第二象限角，且

$|\cos \frac{\alpha}{2}| = -\cos \frac{\alpha}{2}$ ，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 是 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

【例五】求下列三角函数值：

(1) $\cos(-1050^\circ)$ ；

(2) $\tan \frac{19\pi}{3}$ ；

(3) $\sin(-\frac{31}{4}\pi)$.

(4) $\sin(-1395^\circ)\cos 1110^\circ + \cos(-1020^\circ)\sin 750^\circ$.

5.2.3 同角三角函数的基本关系

【学习目标】

1. 掌握同角三角函数的三种基本关系并能自行推导
2. 已知某角的一个三角函数值, 能够求它的其余各三角函数值
3. 能利用同角三角函数关系式化简三角函数式和证明三角恒等式
4. 灵活运用同角三角函数关系式的不同变形, 提高三角恒等变形的能力, 进一步树立化归思想方法

【重点】公式 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 及 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 的推导及运用

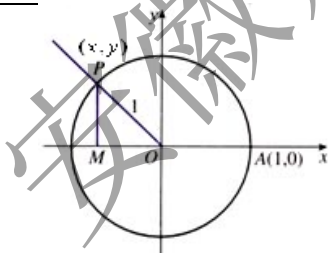
【难点】选择适当的方法和技巧证明三角恒等式

★问题 1: 角 α 的正弦、余弦、正切函数值之间有什么数量关系吗?

【探究一】证明下面两个三角恒等式:

① $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ —— (平方关系)

② $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ —— (商的关系)



【思考】在式子 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ 中, 角 α 的范围是

(注: 引入余切 $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$, 则还有一个恒等式:

$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$ —— (倒数关系))

【小练习】(1) 化简 $\sqrt{1 - \sin^2 \frac{3\pi}{5}}$ 的结果是()

A. $\cos \frac{3\pi}{5}$ B. $\sin \frac{3\pi}{5}$ C. $-\cos \frac{3\pi}{5}$ D. $-\sin \frac{3\pi}{5}$

(2) 若 $\sin \alpha = -\frac{5}{13}$, 且 α 为第四象限角, 则 $\tan \alpha$ 的值等于()

A. $\frac{12}{5}$ B. $-\frac{12}{5}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $-\frac{5}{12}$

(3) 化简 $\sqrt{1 - \sin^2 440^\circ} =$ _____.

【例一】(1) 已知 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 求 $\sin \alpha$ 及 $\tan \alpha$ 的值.

(2) 已知角 α 的终边上一点 $P(-\sqrt{3}, m)$, 且 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}m}{4}$, 求 $\cos \alpha, \sin \alpha$ 的值.

(3) 已知 $\sin \alpha = \frac{4-2m}{m+5}, \cos \alpha = \frac{m-3}{m+5}$, α 是第四象限角, 求 $\tan \alpha$ 的值.

【例二】已知 $\tan \alpha = 2$, 求下列各式的值:

(1) $\frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{4\sin \alpha - 9\cos \alpha};$

(2) $\frac{2\sin^2 \alpha - 3\cos^2 \alpha}{4\sin^2 \alpha - 9\cos^2 \alpha};$

(3) $4\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha - 5\cos^2 \alpha.$

【变式 1】已知 $\frac{1}{\tan \alpha - 1} = 1$, 求 $\frac{1}{1 + \sin \alpha} \cdot \frac{1}{\alpha}$ 的值.

【例三】化简：(1) $\frac{\sqrt{1-2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}}{\sin 10^\circ - \sqrt{1-\sin^2 10^\circ}}$;

(2) $\frac{1-\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1-\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}$.

(3) 化简 $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha =$

【点评】注意体验“1”的灵活运用

【例四】(1) 化简： $\frac{\sqrt{1+\sin \alpha} - \sqrt{1-\sin \alpha}}{\sqrt{1-\sin \alpha} - \sqrt{1+\sin \alpha}}$.

(2) 化简：

$$\sin^2 \alpha \cdot \tan \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cot \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$$

(3) 求证： $\frac{\tan \alpha \sin \alpha}{\tan \alpha - \sin \alpha} = \frac{\tan \alpha + \sin \alpha}{\tan \alpha \sin \alpha}$.

【例五】(易错题) 已知 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，且

$\sin A + \cos A = \frac{1}{5}$ ，求 $\frac{4}{\sin A} + \frac{3}{\cos A}$ 的值.

☆【例六】已知关于 x 的方程 $2x^2 - (\sqrt{3}+1)x + m = 0$ 的两个根分别为 $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ ， $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

(1) 求 $\frac{\sin \theta}{1 - \frac{1}{\tan \theta}} + \frac{\cos \theta}{1 - \tan \theta}$ 的值；

(2) 求实数 m 的值；

(3) 求 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ 及 θ 的值.

5.3.1 三角函数的诱导公式（第1课时）

【学习目标】

1. 识记诱导公式（二）（三）（四）
2. 理解和掌握公式的内涵及结构特征，会初步运用诱导公式求三角函数的值，并进行简单三角函数式的化简和证明
3. 能进行诱导公式的推导，培养观察力、分析归纳能力，领会数学的归纳转化思想方法

【重点】诱导公式的推导及应用

【难点】相关角边的几何对称关系及诱导公式结构特征的认识

【复习引入】终边相同的角同名三角函数的关系：

诱导公式一：, ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$$

$$\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan \alpha, \quad \cot(\alpha + 2k\pi) = \cot \alpha$$

★问题 1：我们利用单位圆定义了三角函数，而圆具有很好的对称性，能否利用圆的对称性得到终边关于 x 轴、 y 轴、原点对称的角度之间三角函数值的关系？

【探究一】根据右边的图形填空：

终边与角 α 的终边关于 y 轴对称的角可以表示为

$$\pi - \alpha$$

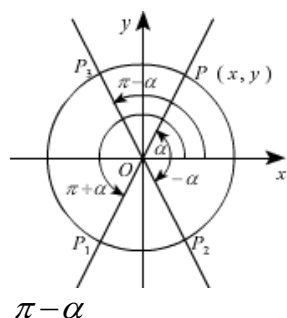
终边与角 α 的终边关于

_____ 对称的角可以表示为

$$-\alpha \quad (\text{或 } 2\pi - \alpha)$$

终边与角 α 的终边关于

_____ 对称的角可以表示为



★问题 2：设点 P 的坐标为 (x, y) ，则上图中点 P_1 (____)，点 P_2 (____)， P_3 (____)。

【探究二】结合三角函数的定义和坐标之间关系：

$$\sin(\pi + \alpha) = -y = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cos(\pi + \alpha) = -x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \frac{y}{x} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cot(\pi + \alpha) = \frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$$

我们可以推导出下面的几组公式：

诱导公式二：

$$\sin(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cos(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cot(\pi + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

诱导公式三：

$$\sin(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cos(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cot(-\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

诱导公式四：

$$\sin(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cos(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \cot(\pi - \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

★问题 3：诱导公式（一）的作用：_____

诱导公式（二）（三）（四）的作用_____

★问题 4：观察公式的结构，如何用概括的语言来描述？

【探究三】 $2k\pi \pm \alpha$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\pi \pm \alpha$, ($-\alpha$ 为 $k=0$ 时的特殊情况) 的三角函数值，等于 α 的_____函数值，前面加上一个把 α 看成_____时原函数值的符号。

诱导公式一~四的记忆口诀：

函数名_____，符号看_____。

（注：1. 记忆口诀的含义是诱导公式两边的函数名称一致，符号则是将 α 看成锐角时原角所在象限的三角函数值的符号；2. 公式中的角 α 可以是任意角）

【例一】计算:

(1) $\cos 225^\circ$

(2) $\sin 585^\circ$

(3) $\sin(-\frac{16\pi}{3})$

(4) $\tan \frac{17\pi}{6}$

【例二】化简 $\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \sin(\alpha + 360^\circ)}{\sin(-\alpha - 180^\circ) \cdot \cos(-180^\circ - \alpha)}$

【例三】(多选题)下列各式正确的是()

A. $\sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin \alpha$

B. $\cos(-\alpha + \beta) = -\cos(\alpha - \beta)$

C. $\sin(-\alpha - 360^\circ) = -\sin \alpha$

D. $\cos(-\alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta)$

【例四】(1) 已知 $\sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) = -\frac{1}{2}$, 求 $\sin(\alpha - \frac{5\pi}{3})$

的值.

(2) 已知 $\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{1}{2}$, 求 $\cos^2(\alpha - \frac{\pi}{3}) \sin(\frac{2\pi}{3} + \alpha)$ 的值.(3) 已知 $\cos(\alpha - 75^\circ) = -\frac{1}{3}$, 且 α 为第四象限角, 求 $\sin(105^\circ + \alpha)$ 的值.【例五】(1) 若 $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = 2$, 则 $\sin(\alpha - 5\pi) \cdot \cos(3\pi - \alpha)$ 等于()

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\pm \frac{3}{10}$ D. $-\frac{3}{10}$

(2) 已知 n 为整数, 化简 $\frac{\sin(n\pi + \alpha)}{\cos(n\pi + \alpha)}$ 所得结果是_____.(3) 设 $f(x) = a\sin(\pi x + \alpha) + b\cos(\pi x + \beta)$, 其中 a, b, α, β 为非零常数, 若 $f(2018) = -1$, 则 $f(2019) =$ _____.(4) 化简 $\sqrt{1 + 2\sin(\pi - 2) \cos(\pi - 2)}$ 的结果为()

A. $\sin 2 + \cos 2$ B. $\cos 2 - \sin 2$
C. $\sin 2 - \cos 2$ D. $\pm(\cos 2 - \sin 2)$

【例六】已知 $f(\alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha) \cos(2\pi - \alpha) \tan(-\alpha + \pi)}{-\tan(-\alpha - \pi) \sin(-\pi - \alpha)}$.(1) 化简 $f(\alpha)$;(2) 若 α 是第三象限角, 且 $\sin(\alpha + \pi) = \frac{1}{5}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

5.3.2 三角函数的诱导公式（第2课时）

【学习目标】

1. 识记诱导公式（五）（六）及其推论
2. 正确地运用这些公式进行任意角的正弦、余弦和正切值的求解、简单三角函数式的化简与三角恒等式的证明
3. 通过公式的应用，进一步培养化归思想，运算推理能力、分析问题和解决问题的能力

【重点】六组诱导公式及推论的综合运用

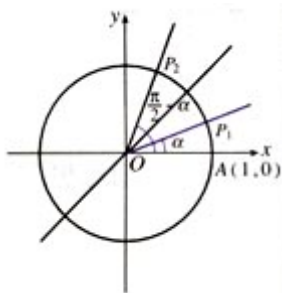
【难点】对称变换思想在学生在学习过程中的渗透

【复习引入】填表：

	$\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$
与角 α 的终边 关系	终边相同	关于 x 轴对称	关于 y 轴 对称	关于原点 对称
正弦值	$\sin(\alpha + 2k\pi)$ = _____	$\sin(-\alpha)$ = _____	$\sin(\pi - \alpha)$ = _____	$\sin(\pi + \alpha)$ = _____
余弦值	$\cos(\alpha + 2k\pi)$ = _____	$\cos(-\alpha)$ = _____	$\cos(\pi - \alpha)$ = _____	$\cos(\pi + \alpha)$ = _____
正切值	$\tan(\alpha + 2k\pi)$ = _____	$\tan(-\alpha)$ = _____	$\tan(\pi - \alpha)$ = _____	$\tan(\pi + \alpha)$ = _____

★问题 1：利用诱导公式把任意角的三角函数转化为锐角三角函数的基本步骤是什么？

★问题 2：终边与角 α 的终边关于直线 $y = x$ 对称的角可以表示为_____.



【探究一】如图，如果点 P_1 的坐标为 (x, y) ，则点 P_1 关于

直线 $y = x$ 对称的点 P_2 的坐标为(_____).

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x = \underline{\hspace{2cm}}; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = y = \underline{\hspace{2cm}}$$

诱导公式五：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

【探究二】利用诱导公式五推导下列公式：

诱导公式六：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

【练习】证明：(1) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$;

(2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$.

推论 1（诱导公式七）：

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

推论 2（诱导公式八）：

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

★问题 3：观察公式的结构，如何用概括的语言来描述？这四组公式与前四组诱导公式有什么不同？

【探究三】 $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ 的正弦（余弦）值，分别等于 α 的_____（_____）值，前面加上一个把 α 看

成_____时原函数值的符号.

诱导公式五~八的记忆口诀:

函数名_____, 符号看_____.

★问题 4: 能否将诱导公式一~八统一起来记忆?

诱导公式记忆:

_____变_____不变, 符号看_____

(或: _____变_____不变, 符号看_____)

★问题 5: 请解释这一句话的含义?

【例一】化简:

$$(1) \frac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{3\pi}{2}+\alpha)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \frac{\sin(-\alpha-\frac{3\pi}{2})\sin(\frac{3\pi}{2}-\alpha)\tan^2(2\pi-\alpha)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)\cos^2(\pi-\alpha)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例二】求值:

$$(1) \frac{\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ}{\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \cos^2(\frac{\pi}{4}-\alpha) + \cos^2(\frac{\pi}{4}+\alpha) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(3) \sin^2 120^\circ + \cos 180^\circ + \tan 45^\circ - \cos^2(-330^\circ) + \sin(-210^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \frac{\sqrt{1+\cos 100^\circ} \sin 170^\circ}{\cos 370^\circ + \sqrt{1-\sin^2 170^\circ}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例三】 (1) 已知 $\cos(75^\circ + \alpha) = \frac{1}{3}$, 其中 α 为第

三象限角, 求 $\cos(105^\circ - \alpha) + \sin(\alpha - 105^\circ)$ 的值.

$$(2) \text{ 已知 } \sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{4}, \text{ 则 } \sin(\frac{5\pi}{6} - x) + \sin^2(\frac{\pi}{3} - x) =$$

_____.

【例四】化简:

$$\frac{\sin(2\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)\cos(\frac{11\pi}{2} - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)\sin(3\pi - \alpha)\sin(-\pi - \alpha)\sin(\frac{9\pi}{2} + \alpha)}$$

$$\text{【例五】已知 } f(\alpha) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)\cos(2\pi - \alpha)\sin(-\alpha + \frac{3\pi}{2})}{\sin(-\pi - \alpha)\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}.$$

(1) 化简 $f(\alpha)$:

(2) 若 α 是第三象限角, 且 $\cos(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{5}$, 求 $f(\alpha)$ 的值.

5.4.1 正弦函数、余弦函数的图象

【学习目标】

1. 了解正弦曲线和画法及原理，理解余弦曲线与正弦曲线的联系并利用平移原理得到余弦曲线
2. 掌握“五点法”画出函数在一个周期内的简图
3. 能利用正弦（余弦）函数一个周期上的图象平移出整个定义域上的图象，观察图象形状，感受图象特点

【重点】利用单位圆中的正弦线画正、余弦曲线

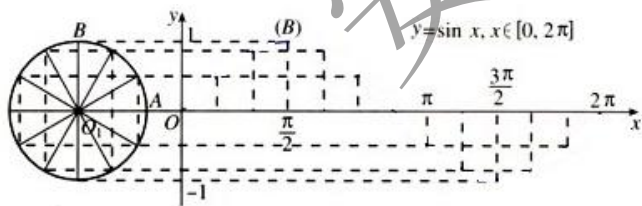
【难点】用五点法画正、余弦曲线

【复习引入】我们知道，对于任给定的一个实数 x ，有_____的值 $\sin x$ （或 $\cos x$ ）与之对应，称 $y = \sin x$ 为正弦函数（ $y = \cos x$ 为余弦函数），定义域为_____。

【创设情景】生活中的正弦图象：如抖动绳子产生的图案，简谐震动的图象，水波的形状（展示动画）

★问题 1: 画出正弦函数 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象：

【探究一】方法一：列表取值，描点连线
方法二：利用三角函数线辅助作图
观看演示动画，了解利用正弦线得到正弦函数图象的原理：



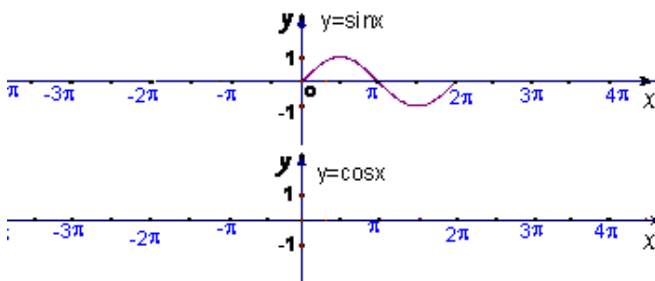
【画一画】在上图中用圆滑曲线画出 $y = \sin x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象。

★问题 2: 如何才能画出 $y = \sin x$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数图象？

【探究二】由诱导公式一： $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ 可知 $y = \sin x, x \in [2k\pi, 2(k+1)\pi]$ 上的图象与 $y = \sin x,$

$x \in [0, 2\pi)$ 上的图象完全相同，因此，我们只需将函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi)$ 的图象_____就可以得到 $y = \sin x$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数图象。

【画一画】在下图中画出实数集 $\mathbf{R}$ 上的正弦函数图象：



★问题 3: 如何画函数 $y = \cos x$ 的图象？它跟正弦图象之间有什么关系？

【探究三】由诱导公式： $y = \cos x = \sin(\text{_____})$

则把函数 $y = \sin x$ 的图象_____就可以得到函数 $y = \cos x$ 的图象。

【画一画】利用图象的平移得到 $y = \cos x$ 的图象（在上图中画出）

★问题 4: 观察图象，你认为正弦曲线 $y = \sin x$ 在 $x \in [0, 2\pi]$ 这一区间上，其关键作用的点有几个，分别是什么？

答：关键点有_____个，分别是_____。

（☆注：利用这_____个关键点快速作正弦函数简图的方法叫做“_____”。）

★问题 5: 类似与正弦函数图象的五个关键点，你能找出余弦函数图象在 $[0, 2\pi]$ 上的五个关键点吗？它们是_____，_____，_____，_____，_____。

★问题 6: 观察图象可以得到下面结论：

函数 $y = \sin x, x \in \mathbf{R}$ 的对称轴是_____，对称中心是_____；

函数 $y = \cos x, x \in \mathbf{R}$ 的对称轴是_____，对

称中心是_____.

【例一】用五点法画出下列函数的简图:

(1) $y = 1 + \sin x, x \in [0, 2\pi]$;

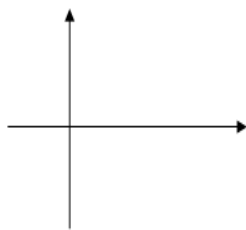
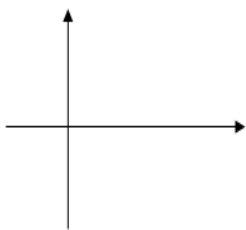
(2) $y = -\cos x, x \in [0, 2\pi]$.

解: (1)

(2)

x					
$\sin x$					
$1 + \sin x$					

x					
$\cos x$					
$-\cos x$					



【思考】函数 $y = 1 + \sin x$ 的图象与 $y = \sin x$ 的图象之间有什么关系? 另外函数 $y = -\cos x$ 的图象与 $y = \cos x$ 的图象之间有什么关系?

【例二】(1) 用“五点法”作出函数 $y = 3 - \cos x$ 的图象, 下列点中不属于五点作图中的五个关键点的是 ()

A. $(\pi, -1)$ B. $(0, 2)$

C. $(\frac{\pi}{2}, 3)$ D. $(\frac{3}{2}\pi, 3)$

(2) 若 $\cos x = 0$, 则角 x 等于()

A. $k\pi (k \in \mathbb{Z})$ B. $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ D. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

(3) (多选题) 下列在 $(0, 2\pi)$ 上的区间能使 $\cos x > \sin x$ 成立的是()

A. $(0, \frac{\pi}{4})$ B. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$

C. $(\frac{5\pi}{4}, 2\pi)$ D. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{4})$

【例三】方程 $\sin x = \lg x$ 的实根个数有()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 无穷多个

【例四】画出下列函数的图象简图:

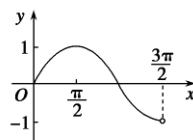
(1) $y = 2\sin(-x + \frac{\pi}{2}) - 1$

(2) $y = |\sin x|$

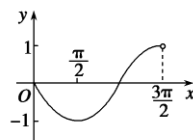
(3) $y = \sin|x|$

(4) $y = \cos x + |\cos x|, x \in [0, 2\pi]$

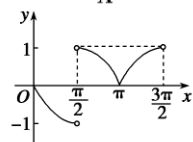
(5) 函数 $y = \cos x |\tan x| (0 \leq x < \frac{3\pi}{2}, \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2})$ 的图象是 ()



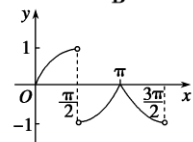
A



B



C



D

【例五】(1) 根据正余弦曲线求满足下列条件的 x 的集合.

① $\sin x \geq -\frac{1}{2}$;

② $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.4.2 正、余弦函数图象的性质（第1课时）

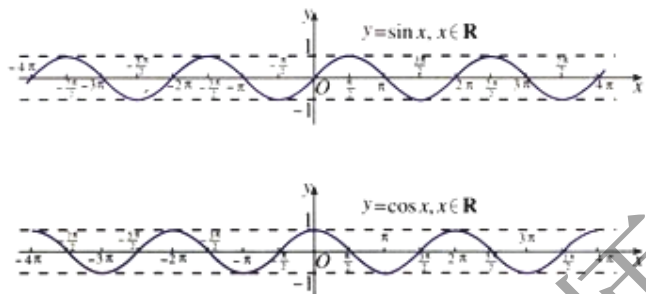
【学习目标】

1. 理解正弦函数、余弦函数的性质，并能在解题中熟练应用
2. 掌握函数周期性和最小正周期的定义，理解周期函数的图象特征与解析表示，初步掌握周期函数的判断方法
3. 通过正弦函数的图象的应用，进一步体会数形结合的思想方法

【重点】正、余弦函数的性质的简单应用

【难点】正、余弦函数图象的变换及数形结合思想的应用

【复习引入】



回顾正弦、余弦函数的图象，填写下面表格：

函数类型	正弦函数 $y = \sin x$	余弦函数 $y = \cos x$
函数图象	见上	见上
定义域		
值域		
奇偶性		
对称轴		
对称中心		
单增区间		
单减区间		

周期性：正弦函数值具有“周而复始”的变化规律，这就是函数的周期性。

对于函数 $f(x)$ ，如果存在一个非零的常数 T ，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有

$$f(x+T) = f(x)$$

那么函数 $f(x)$ 就叫做_____，非零常数 T 叫做这个函数的_____。

☆思考 1：周期函数的周期是否唯一？

答：_____

☆思考 2：周期函数的周期一定是正数吗？

答：_____

如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫做 $f(x)$ 的_____，如正弦函数最小正周期为_____，余弦函数最小正周期为_____。

☆思考 3：所有周期函数的一定有最小正周期吗？你能否举出反例。

答：_____

【例一】(1) (多选题) 下列说法错误的是 ()

- A. 函数 $y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$ 是周期函数，最小正周期为 2π
- B. 函数 $y = |\sin x|$ 是周期函数，最小正周期为 2π
- C. 函数 $y = |\sin x|$ 不是周期函数，但函数 $y = \cos |x|$ 是周期函数
- D. 若函数 $f(x)$ 对 $x \in \mathbb{R}$ 均有 $f(2x+T) = f(2x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 是周期函数，且最小正周期为 T

(2) 函数 $y = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ 的最小正周期为_____。

【例二】求下列函数的最小正周期：

(1) $y = 3\cos(x + \frac{\pi}{2})$;

(2) $y = \sin(2x)$;

(3) $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ 。

☆思考1：例一中（2）（3）的最小正周期是多少？你能否通过图象进行说明？

☆思考2：你能否发现 $y = \sin(\omega x)$ 的最小正周期 T 与 ω 之间有什么规律？那 $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期呢？能否证明。

【探究】函数 $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期

（点拨：利用周期函数的定义证明）

函数 $y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为

$T = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例三】（1）求下列函数的最小正周期：

① $y = \frac{1}{2} \cos(-4x - 2)$ ； ② $y = |\sin 2x|$.

（2）已知函数 $f(x) = \left| \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 \right|$ ，则下列命题

正确的是（ ）

- A. $f(x)$ 是周期为 1 的奇函数
- B. $f(x)$ 是周期为 2 的偶函数
- C. $f(x)$ 是周期为 1 的非奇非偶函数
- D. $f(x)$ 是周期为 2 的非奇非偶函数

【例四】（1）满足 $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$ 的 x 的集合是（ ）

- A. $\{x \mid 2k\pi + \frac{5}{12}\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{13}{12}\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$
- B. $\{x \mid 2k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7}{12}\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

C. $\{x \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5}{6}\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

D. $\{x \mid 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{5}{6}\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

（2）当 $x \in [0, 2\pi]$ 时，满足 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq -\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围是（ ）

- A. $[0, \frac{2\pi}{3}]$
- B. $[\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$
- C. $[0, \frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$
- D. $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$

【例五】（1）函数 $y = 3\sin 2x - 1$ 的一条对称轴方程是（ ）

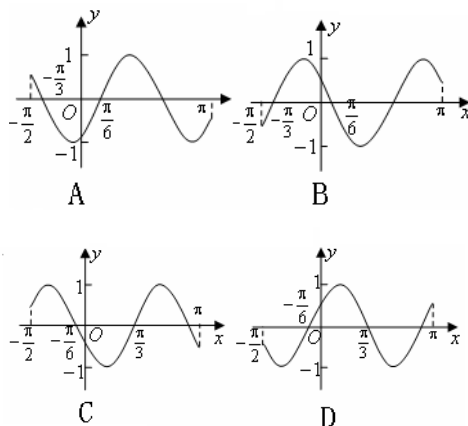
- A. $x = \frac{\pi}{2}$
- B. $x = \pi$
- C. $x = \frac{\pi}{4}$
- D. $x = \frac{\pi}{8}$

（2）下列各点中是函数 $y = 3 + 2\cos \frac{x}{2}$ 图像的一个对称中心的是（ ）

- A. $(\frac{\pi}{2}, 0)$
- B. $(\frac{\pi}{2}, 3)$
- C. $(\pi, 0)$
- D. $(\pi, 3)$

（3）函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + 1$ 的图象的对称中心是 _____，对称轴方程是 _____。

【例六】函数 $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的简图是（ ）



5.4.2 正、余弦函数图象的性质(第2课时)

【学习目标】

1. 理解正弦函数、余弦函数的性质, 并能在解题中熟练应用
2. 掌握函数周期性和最小正周期的定义, 理解周期函数的图象特征与解析表示, 初步掌握周期函数的判断方法
3. 通过正弦函数的图象的应用, 进一步体会数形结合的思想方法

【重点】函数的周期性的定义和最小正周期的理解

【难点】判断函数的周期性

【复习引入】

对于函数 $f(x)$, 如果存在一个非零的常数 T , 使得当 x 取定义域内的每一个值时, 都有 _____, 那么函数 $f(x)$ 就叫做周期函数, 非零常数 _____ 叫做这个函数的周期.

☆思考1: 等式 $\sin(30^\circ + 120^\circ) = \sin 30^\circ$ 是否成立? 如果这个等式成立, 能否说 120° 是正弦函数 $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$ 的一个周期? 为什么?

【例一】函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象 ()

- A. 关于原点对称 B. 关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称
C. 关于 y 轴对称 D. 关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

【例二】(1) 求函数 $y = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$, $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 的单调递增区间.

(2) 求函数 $y = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x)$ 的单调递增区间.

【例三】利用三角函数的单调性, 比较下列各组数的大小:

(1) $\sin(-\frac{\pi}{18})$ 与 $\sin(-\frac{\pi}{10})$;

(2) $\sin 194^\circ$ 与 $\cos 160^\circ$.

(3) $\sin 1$, $\sin 2$, $\sin 3$.

【例四】求下列函数的值域:

(1) $y = 3 - 2\sin 2x$; (2) $y = \frac{\cos x}{2\cos + 1}$;

(3) $y = \cos^2 x - 4\cos x + 5$;

(4) $y = \sin x + \cos x + \sin x \cdot \cos x$.

【例六】设 a 为常数，且 $a > 1, 0 \leq x \leq 2\pi$ ，则函数

$f(x) = \cos^2 x + 2a \sin x - 1$ 的最大值为 ()

- A. $2a + 1$ B. $2a - 1$
C. $-2a - 1$ D. a^2

【例五】(1) 函数 $y = \frac{3\cos x + 1}{\cos x + 2}$ 的值域是_____.

(2) 设 $x \in (0, \pi)$ ，则 $\frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x}$ 的最小值为_____.

(3) 求函数 $y = \frac{3 + 2\cos x + \cos^2 x}{1 + \cos x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 的值域.

【例七】已知方程 $\cos^2 x + 4\sin x - a = 0$ 有解，那么 a 的取值范围是_____.

5.4.3 正切函数的性质与图象

【学习目标】

1. 了解正切函数的定义，理解正切函数的基本性质，掌握正切函数的图象特征，并运用性质解决简单问题
2. 在探究正切函数基本性质和图象的过程中，渗透类比，数形结合的思想，提升发现问题、提出问题、解决问题的能力，养成良好的数学学习习惯
3. 经历先有性质，并用性质指导画图的探究过程，感受数学研究的多样性与统一性

【重点】探究正切函数的基本性质与图象特征

【难点】函数性质并根据性质作出图象

【复习引入】

提问 1：将角推广到任意角，角 α 的正切是如何定义的呢？

答：_____

提问 2：正切中角 α 是任意的吗？

答：_____

我们可以类比正弦函数、余弦函数的定义，定义一个正切函数：

对于定义域内的任意一个实数 x ，都有唯一确定的值 $\tan x$ 与它对应，按照这个对应法则所建立的函数，叫做正切函数，表示为

$$y = \tan x, \quad \{x | x \in \mathbb{R} \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$$

★问题 1：类比我们学过的正弦函数、余弦函数的图象和性质，我们可以从哪些方面研究正切函数的性质？

★问题 2：我们知道要研究正切函数的性质，可以借助图象，但是如果不画图象，你还能否判断函数的奇偶性、周期性与单调性？

【探究一】正切函数的性质

1、奇偶性：_____

理由：_____

2、周期性：_____

理由：_____

3、单调性：_____

理由：_____

☆思考：正切函数在定义域上是单增的吗？

4、值域：_____

理由：_____

（☆题外话：我们发现，不用画图象仍然可以通过其他方式研究函数的常见性质，特别是在图象不好画时研究性质提供了新的思路（如抽象函数），也为我们研究数学提供更多的视角.）

★问题 3：我们已知了正切函数的部分性质，如何利用已有的性质帮助我们快速画出正切函数的图象？

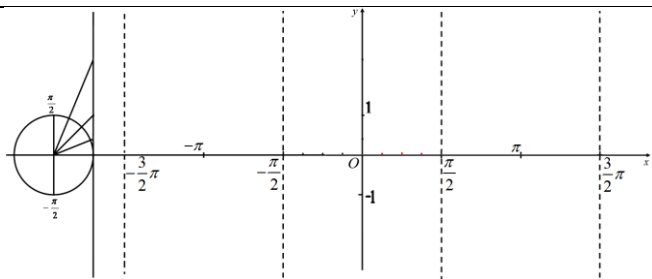
【探究二】利用正切函数的性质快速画出其图象

☆引导思考 1：直接描点画整个定义域内的图象吗？

☆引导思考 2：选择哪一个长度为 π 的区间呢？

☆引导思考 3：区间还可以缩小吗？

请在下图中作出正切函数的图象：



★问题 4: 认真观察正切函数的图象, 发现有何特征?

答: 从图象上可以看出, 正切曲线是由_____组成的.

★问题 5: 你能从正切函数的图象上, 讨论正切函数的周期性、单调性、值域和对称性吗?

1、周期性: 最小正周期为_____

2、单调性: 单调增区间: _____
单调减区间: _____

3、值域: _____

当 x 从左侧趋于 $k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时, $\tan x \rightarrow$ _____

当 x 从右侧趋于 $k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ 时, $\tan x \rightarrow$ _____

4、对称性: 对称中心: _____
对称轴: _____

(题外话: 如果把函数看成一个人的话, 图象就好比他的外表, 代数性质就好比他的内心, 一个完整的人是内心和外表的综合体. 前面的指数、对数、幂、正弦、余弦函数都是先看外表的, 而内心的美才是真正的美!)

【例一】 求下列函数的最小正周期:

(1) $y = \tan 2x$; (2) $y = 5 \tan \frac{x}{2}$.

结论: 函数 $y = A \cdot \tan(\omega x + \varphi)$ 的最小正周期为

$T =$ _____.

求下列函数的最小正周期:

(3) $y = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$; (4) $y = |\tan x|$.

【例二】 已知函数 $y = \tan(2x - \frac{\pi}{3})$

(1) 求该函数的定义域、单调区间.

(2) 解不等式 $\tan(2x - \frac{\pi}{3}) \geq 1$

【例三】 根据正切函数的图象, 写出使下列不等式成立的 x 的集合.

(1) $1 + \tan x \geq 0$; (2) $\tan(x-1) - \sqrt{3} < 0$.

(3) $\tan(2x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$

【例四】 求函数 $y = \tan(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$ 的单调区间.

5.5.1 两角差的余弦公式

【学习目标】

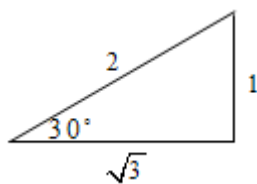
1. 经历两角差的余弦展开公式的推导过程，熟记公式的形式及符号特点
2. 掌握由两角差的余弦公式推导出两角和的余弦公式的方法
3. 熟练两角和与差的余弦公式的正用、逆用和变用，知道常见角的拆分方法

【重点】 两角和与差的余弦公式的推导及运用

【难点】 两角和与差的余弦公式的灵活运用

【情景引入】

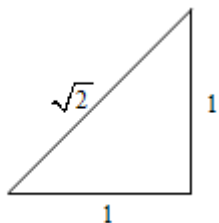
我们在初中学习了 30° 、 45° 、 60° 等这些特殊角，对于这些角的函数值我们可以直接利用直角三角形来获得，如 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



那么你能求出 $\tan 15^\circ$ 的值吗？（提示：可利用上图构造.）

同理，也能得到 $\cos 15^\circ =$ _____.

我们发现 15° 角可以利用 30° 角的一半进行构造，那能否还可以用其他方式构造得到，如 15° 还可以由 $45^\circ - 30^\circ$ 得到，那你能用 $45^\circ - 30^\circ$ 构造图形计算出 $\cos 15^\circ$ 的值吗？



由上面推算，我们不禁要问： $\cos 15^\circ$ 的值与 45° 及 30° 角的三角函数值之间有什么关系吗？或者更一般的说，当 α, β 是任意角时，能不能用 α, β 的三角函数值把 $\alpha + \beta$ 或 $\alpha - \beta$ 的三角函数值表示出来呢？

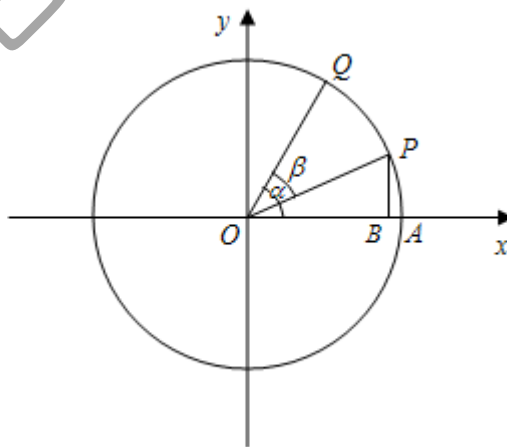
★问题 1：如何用角 α, β 的正弦、余弦值来表示 $\cos(\alpha - \beta)$ 呢？

☆思考： $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha - \cos \beta$ 成立吗？为什么？

【探究】 两角差的余弦 $\cos(\alpha - \beta) = ?$

☆引导思考 1：我们前面的余弦是借助单位圆定义的，这里是否可以借助单位圆构造角 $(\alpha - \beta)$ 的余弦线？

☆引导思考 2：下图中那一条有向线段表示 $\cos(\alpha - \beta)$ ，怎么求？



自己写出推导过程：

☆引导思考 3：那 $\cos(\alpha + \beta) = ?$ 呢？

★两角和与差的余弦公式：

$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

记忆口诀“ ， ”

☆思考：你能借助上图推导 $\sin(\alpha - \beta) = ?$ 吗

〔练习〕：利用两角和与差的余弦公式求 $\cos 15^\circ$ 的值.

答： $\cos 15^\circ =$

【例一】 计算求值：

(1) $\cos 105^\circ$; (2) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$;

(3) $\cos 15^\circ \cos 105^\circ - \sin 15^\circ \sin 105^\circ$;

(4) $\sin x \sin(y - x) - \cos x \cos(y - x)$;

(5) $\sin 7^\circ \cos 23^\circ + \sin 83^\circ \cos 67^\circ$

(6) $\frac{2 \cos 50^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}.$

【例二】 (1) 已知 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$,

$\cos \beta = -\frac{5}{13}$, β 是第三象限角, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

(2) 已知 α, β 均为锐角, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\sin \beta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 求 $\beta - \alpha$ 的值.

【例三】 已知 $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ (α 为第一象限角), 求

$\cos(\frac{\pi}{6} + \alpha) + \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ 的值.

【例四】 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\cos \alpha = \frac{3}{5}$,

$\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$, 求 $\cos \beta$ 的值.

1. 会用诱导公式将两角和与差的正弦问题转化为余弦问题，从而推导出两角和与差的正弦公式，熟记公式的形式及符号特点

2. 掌握两角和与差的正切公式的推导, 知道公式成立时对应角 α 、 β 必须满足的条件, 并熟记公式的形式及特点

3. 了解两角的和与差的正弦、余弦、正切这六个公式之间的逻辑关系，会用它们进行简单的三角函数的求值、化简等计算

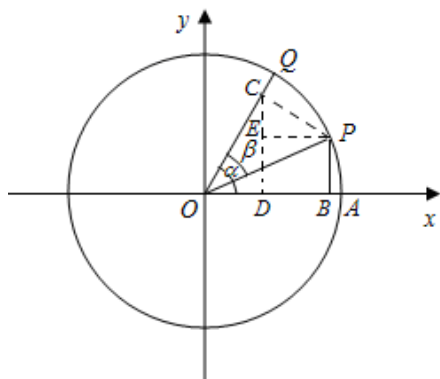
【难点】两角和与差的正切公式的隐性条件和灵活运用

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

口诀：“_____”

★问题 1: 既然 $\alpha \pm \beta$ 的余弦可以用角 α 、 β 的三角函数值表示, 那么它们的正弦、正切是否也可以用角 α 、 β 的三角函数值来表示呢?

【引导方法 1】可以继续用上节课所学的单位圆知识推导吗？



$$\sin(\alpha - \beta) =$$

更进一步，我们可以继续推导下面公式：

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$\tan(\alpha + \beta) =$$

$$\tan(\alpha - \beta) =$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

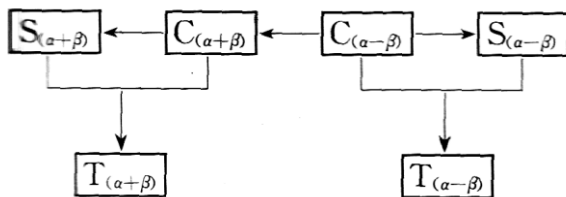
记忆口诀：“ ”

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

答: _____

☆思考2: 从以上推导过程可以看到, 这6个和与差的三角函数公式之间具有紧密的逻辑联系, 你能体会的到吗?



【练习 1】(1) 下列说法正确的序号是_____.

①对于任意角 α, β , 都有 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$.

② $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ 对于任意角 α, β 均成立.

③存在角 α, β , 使得 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

④ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 一定不成立.

(2) 已知 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$, α 是第四象限角, 求

$\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ 、 $\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ 、 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4})$ 的值.

(3) 计算求值:

(1) $\sin 72^\circ \cos 42^\circ - \cos 72^\circ \sin 42^\circ =$ _____;

(2) $\cos 20^\circ \cos 70^\circ - \sin 20^\circ \sin 70^\circ =$ _____.

【例一】 计算求值:

(1) $\sin 14^\circ \cos 16^\circ + \sin 76^\circ \cos 74^\circ$;

(2) $\sin \frac{\pi}{12} - \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12}$; (3) $\frac{1 + \tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$.

(4) $\frac{\sqrt{3} + \tan 15^\circ}{1 - \sqrt{3} \tan 15^\circ}$;

(5) $\tan 23^\circ + \tan 37^\circ + \sqrt{3} \tan 23^\circ \cdot \tan 37^\circ$.

【例二】(1) 已知 α 为三角形的内角且 $\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}$, 则 $\alpha =$ _____;

(2) $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} + \sqrt{6}\sin\frac{\pi}{12}$ 的值是()

- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $y = \cos x + \cos(x + \frac{\pi}{3})$ 的最大值是_____.

【例三】 计算求值:

(1) $(1 + \tan 11^\circ)(1 + \tan 34^\circ) =$ _____.

(2) $\frac{\sin 7^\circ + \cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ - \sin 15^\circ \sin 8^\circ}$;

(3) $(3 + \tan 30^\circ \tan 40^\circ + \tan 40^\circ \tan 50^\circ + \tan 50^\circ \tan 60^\circ) \cdot \tan 10^\circ$.

【例四】(1) 若 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{5}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 则 $\tan \alpha \tan \beta =$ _____.

(2) 已知 $\sin x - \sin y = -\frac{2}{3}$, $\cos x - \cos y = \frac{2}{3}$, 且 x, y 为锐角, 则 $\tan(x - y)$ 的值为_____.

【例五】(山东卷) 已知 $\cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \sin \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, 求 $\sin(\alpha + \frac{7}{6}\pi)$ 的值.

5.5.3 二倍角的正弦、余弦、正切公式

【学习目标】

1. 能熟练地应用两角和公式导出二倍角的正弦、余弦、正切公式，并掌握公式的变形形式
2. 能正确认识“倍角”的相对意义，能熟练地应用倍角公式来进行化简和求值问题

【重点】二倍角公式的推导与逆向转换、变形转换公式的推导与应用

【难点】灵活运用二倍角公式及其变形形式进行三角化简、求值

【复习回顾】

$$\sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}}$$

★问题 1：当上述公式中角 α 、 β 具有特殊化关系 $\alpha = \beta$ 时，公式变为什么形式？

$$\sin(\alpha + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan(\alpha + \alpha) = \underline{\hspace{2cm}}$$

★二倍角公式：

$$\sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} \cdots \cdots S_{2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} \cdots \cdots C_{2\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} \cdots \cdots T_{2\alpha}$$

（公式 $T_{2\alpha}$ 中角 α 满足 $\underline{\hspace{2cm}}$ ）

★问题 2：观察上式的左右两边，式子两边各有什么特征？

答：式子的左边 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，式子的右边 $\underline{\hspace{2cm}}$

★问题 3： $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ 中的平方联想到 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ，公式 $C_{2\alpha}$ 有无其他形式？

$$\text{答：} \cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ = \underline{\hspace{2cm}}$$

☆思考： $\sin 3\alpha = ?$

★问题 4：在前面的学习过程中我们发现很多时候需要逆用和变用公式，如果将二倍角公式逆向转换或变形转换，你能得到哪些其他公式？

【探究一】二倍角公式的逆向转换

$$\sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\tan 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

【探究二】二倍角公式的变形转换

$$1 + \sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 + \cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 - \sin 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 - \cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin^2 \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\cos 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 + \sin \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$1 + \cos \alpha = \underline{\hspace{2cm}}$$

等等……

（练习 1）填空：

$$(1) \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12})(\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}) = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \frac{\tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ} = \underline{\hspace{2cm}};$$

(4) $1 - 2\cos^2 22.5^\circ =$ _____;

(5) 已知 $\tan 2\alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

(练习 2) 下列说法正确的序号是_____.

①对任意的角总有 $\sin 2\theta = 2\sin \theta$.

②不存在角 α , 使得 $\cos 2\theta = 2\cos \theta$.

③公式 $\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ 成立的条件是 $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

④对于任意角 α , 都有 $\sin \frac{\alpha}{2} = 2\sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}$.

【例一】求下列各式的值:

(1) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$;

(2) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$;

(3) $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$;

(4) $-\frac{2}{3} + \frac{4}{3} \cos^2 15^\circ$;

(5) $\frac{\sin 50^\circ (1 + \sqrt{3} \tan 10^\circ) - \cos 20^\circ}{\cos 80^\circ \cdot \sqrt{1 - \cos 20^\circ}}$;

(6) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$;

【例二】(1) 已知 $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 求 $\sin 4\alpha$ 、 $\cos 4\alpha$ 和 $\tan 4\alpha$ 的值.

(2) 若 $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{4}{5}$, 则 $\sin 2\alpha =$ _____.

(3) 已知 α 是第二象限角, $\tan(\pi + 2\alpha) = -\frac{4}{3}$, 则 $\tan \alpha =$ _____.

点拨:

对于“二倍角”应该有广义上的理解, 如: 8α 是 4α 的二倍角, 6α 是 3α 的二倍角, 4α 是 2α 的二倍角, 3α 是 $\frac{3}{2}\alpha$ 的二倍角, $\frac{\alpha}{2}$ 是 $\frac{\alpha}{4}$ 的二倍角, $\frac{\alpha}{3}$ 是 $\frac{\alpha}{6}$ 的二倍角……则有:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{4} - \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{4} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{4}$$

$$\tan \frac{\alpha}{3} = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{6}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{6}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2^n} = \cos^2 \frac{\alpha}{2^{n-1}} - \sin^2 \frac{\alpha}{2^{n-1}}$$

【例三】在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan B = 2$, 求 $\tan(2A + 2B)$ 的值.

【例四】已知 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = -\frac{1}{7}$, 且 $\alpha, \beta \in (0, \pi)$, 求 $2\alpha - \beta$ 的值.

5.5.4 简单的三角恒等变换

【学习目标】

1. 经历半角公式、积化和差、和差化积公式的推导过程, 领悟推导过程中蕴含的换元、化归、整体转换的数学思想, 会用这些公式处理一些基本的三角恒等变形问题

2. 进一步熟练两角和差、二倍角的三角函数公式的运用, 能快速根据问题的条件选择公式或变形进行求解, 并巩固 $f(x) = a \sin x + b \cos x$ 这类正弦函数与余弦函数的叠加方法, 且会应用到解题中

【重点】以已有的十一个公式为依据, 以推导积化和差、和差化积、半角公式作为训练, 学习三角变换的内容、思路和方法, 在与代数变换相比较中, 体会三角变换的特点, 提高推理、运算能力

【难点】认识三角变换的特点, 并运用数学思想方法指导变换过程的设计, 不断提高从整体上把握变换过程的能力

【复习引入】默写下列公式:

$$\begin{cases} \sin(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}} \\ \sin(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}} \\ \cos(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(\alpha + \beta) = \underline{\hspace{2cm}} \\ \tan(\alpha - \beta) = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \underline{\hspace{2cm}} \\ \cos 2\alpha &= \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \tan 2\alpha &= \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

★问题 1: 你能用 $\cos \alpha$ 表示 $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$, $\tan^2 \frac{\alpha}{2}$ 吗?

(点拨: α 与 $\frac{\alpha}{2}$ 有什么关系? 该如何求解?)

解:

★注: 问题 1 的结果还可以表示为

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}},$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

并称之为**半角公式**, 符号由 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限决定。

★问题 2: 上面的这种变换称之为三角变换, 那么它和我们以前的代数式变换有什么不同呢?

答: 代数式变换往往着眼于式子结构形式的变换。对于三角变换, 由于不同的三角函数式不仅会有结构形式方面的差异, 而且还会有所包含的角, 以及这些角的三角函数种类方面的差异, 因此三角恒等变换常常首先寻找式子所包含的各个角之间的联系, 并以此为依据选择可以联系它们的适当公式, 这是三角式恒等变换的重要特点。

(小练习) 求证: $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$

【例一】证明:

(1) $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)];$

(5) $\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2}.$

证明: (1)

(☆思考: 还有其它方法吗?)

法二:

(2) (点拨: 式子(2)与式子(1)左右两边在结构形式上有什么关联?)

点拨:

在(2)的证明过程中, 用到了换元的思考, 如把 $\alpha + \beta$ 看作 θ , $\alpha - \beta$ 看作 θ , 从而把包含 α, β 的三角函数式变换成 θ, φ 的三角函数式。另外, 把 $\sin \alpha \cos \beta$ 看作 x , $\cos \alpha \sin \beta$ 看作 y , 把等式看作 x, y 的方程, 通过解方程求得 x , 就是方程思想的体现。

★问题 3: 上面两个式子的左右两边在结构形式上又有什么不同?

答: 式子(1)左边是____的形式, 右边是____的形式; 而式子(2)左边是____的形式, 右边是____的形式。

★问题 4: 你能仿照刚才的推导方法, 得出其他类似的结论吗?

积化和差:

$$(2) \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)];$$

$$(3) \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$(4) \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)].$$

和差化积:

$$(6) \sin \theta - \sin \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2};$$

$$(7) \cos \theta + \cos \varphi = 2 \cos \frac{\theta + \varphi}{2} \cos \frac{\theta - \varphi}{2};$$

$$(8) \cos \theta - \cos \varphi = -2 \sin \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}.$$

【例二】(万能公式) 求证:

$$(1) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}; (2) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha};$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$$

【例三】(1) 已知 $\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2}$,

$\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{1}{3}$, 则 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值为_____.

(2) 已知 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{5}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, 则 $\tan \alpha \tan \beta$ 的值为_____.

【例四】(1) 函数 $f(x) = 2 \cos^2 2x$ 图象的一个对称中心为 ()

- A. $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ B. $(-\frac{\pi}{4}, 1)$
C. $(-\frac{\pi}{8}, 1)$ D. $(\frac{\pi}{4}, 0)$

(2) 若将函数 $f(x) = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向左平移 $a(a > 0)$ 个单位后, 所得图象关于原点对称, 则 a 的最小值为 ()

- A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

(3) (2020·上海·位育中学高一期中) 函数

$y = \sin x(\sin x + \sqrt{3} \cos x), x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 值域为 ()

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ B. $[0, 1]$ C. $[-2, 2]$ D. $[0, \frac{3}{2}]$

【例五】求函数 $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \sin(x + \frac{\pi}{4})$ 的最小正周期与单调增区间.

5.6.1 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象

【学习目标】

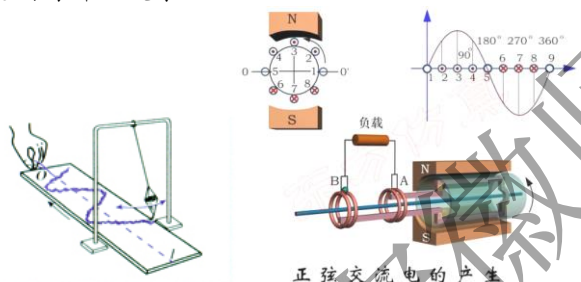
1. 知道函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象是由函数 $y = \sin x$ 经历左右平移、水平和垂直伸缩变换得到的，并理解 φ 、 ω 、 A 对图象的影响
2. 了解 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 图象的物理意义，并能正确地指出简谐运动中的振幅、周期、频率、相位、初相
3. 理解用变换方法将 $y = \sin x$ 的图象变换到 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 过程中先变周期再平移与先平移再变周期这两种方法中平移量不同的原因，并能在以后学习中进行准确判断

【重点】探究函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 中 φ 、 ω 、 A 对图象的影响

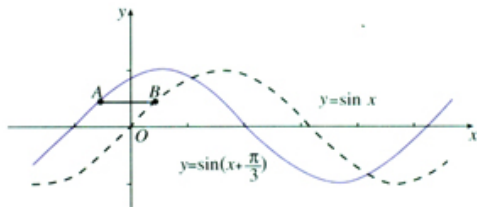
【难点】先变周期再平移与先平移再变周期这两种方法中不同平移量的准确判断

【情景引入】

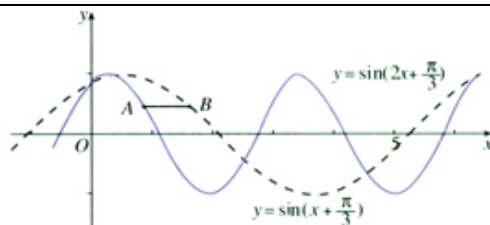
在物理学中，简谐运动中单摆对平衡位置的位移 y 与时间 x 的关系，交流电的电流 y 与时间 x 的关系，质点匀速圆周运动高度 H 与时间 t 的关系等都是形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的函数。那么，函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 与我们前面所学的函数 $y = \sin x$ 之间有什么关系呢？



★问题 1：从解析式上看，函数 $y = \sin x$ 就是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 在 $A=1, \omega=1, \varphi=0$ 时的特殊情况，那么 A 、 ω 、 φ 在一般情况下对 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象会有怎样的影响？

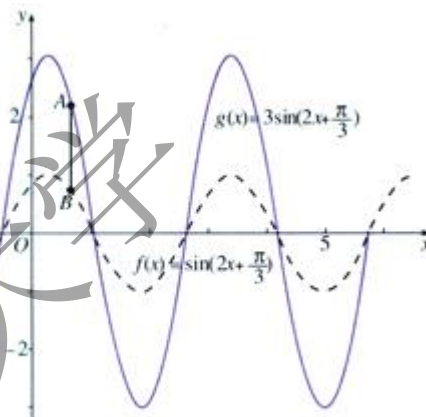
【探究一】探索 φ 对图象的影响

结论 1：函数 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象可以看作是函数 $y = \sin x$ 的图象_____得到的。

【探究二】探索 ω 对图象的影响

结论 2：函数 $y = \sin(\omega x)$ 的图象可以看作是函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标_____得到的。

☆思考： ω 越大，周期越_____；
 ω 越小，周期越_____。

【探究三】探索 A ($A > 0$) 对图象的影响

结论 3：函数 $y = A \cdot \sin x$ 的图象可以看作是函数 $y = \sin x$ 的图象上所有点的纵坐标_____得到的。

☆思考： $A < 0$ 情况又会怎么样？

总结：一般地，函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ （其中 $A > 0$ ， $\omega > 0$ ）的图象可以看作下面的方法得到：

先画出函数 $y = \sin x$ 的图象，再把正弦曲线_____，得到 $y = \sin(x + \varphi)$ 的图象，然后使曲线上各点的横坐标_____得到函数 $y = \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象，然后把曲线上各点的纵坐标_____，这时得到的曲线就是函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象。

★问题 2：你能说说如何得到 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的图象吗？

〔练习 1〕 要得到函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象，可

以将 $y = \sin x$ 的图象先向_____平移_____个单位，然后将曲线上所有点的横坐标都_____，纵坐标都_____，这时得到的曲线就是函数

$y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象.

★问题 3: 练习 1 中，我们是先平移，再变周期与振幅（A 为振幅）的，那如果将 $y = \sin x$ 的横坐标先乘以 $\frac{1}{2}$ ，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，最后纵坐标乘以 3，还能得到 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象吗？

〔探究四〕 $y = \sin x \rightarrow$ 周期 $\rightarrow$ 平移 $\rightarrow$ 振幅
 $\rightarrow y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

$y = \sin x \rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____
 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

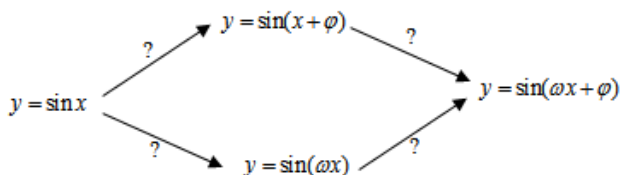
〔探究五〕 $y = \sin x \rightarrow$ 振幅 $\rightarrow$ 平移 $\rightarrow$ 周期
 $\rightarrow y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

$y = \sin x \rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____
 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

〔探究五〕 $y = \sin x \rightarrow$ 振幅 $\rightarrow$ 周期 $\rightarrow$ 平移
 $\rightarrow y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

$y = \sin x \rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____ $\rightarrow$ _____
 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

结论 4: 平移的量与平移和周期的“先后顺序”有关，与振幅的“顺序”无关.



..... $y = \sin(\omega x + \varphi) \longrightarrow y = A \cdot \sin(\omega x + \varphi)$

〔练习 2〕 将 $y = \sin x$ 的横坐标先乘以 2，再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，最后纵坐标乘以 3，得到的图象对应的函数为_____.

〔练习 3〕 已知函数 $y = 3\sin(x + \frac{\pi}{5})$ 的图象为 C，

(1) 为了得到函数 $y = 3\sin(x - \frac{\pi}{5})$ 的图象，只要把 C 上所有的点向_____平移_____个单位长度.

(2) 为了得到函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{5})$ 的图象，只要把

C 上所有的点 ()

- A. 横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变
- B. 横坐标缩短到原来的一半，纵坐标不变
- C. 纵坐标伸长到原来的 2 倍，横坐标不变
- D. 纵坐标缩短到原来的一半，横坐标不变

(3) 为了得到函数 $y = 4\sin(x + \frac{\pi}{5})$ 的图象，只要把

C 上所有的点 ()

- A. 横坐标伸长到原来的 $\frac{4}{3}$ 倍，纵坐标不变
- B. 横坐标伸长到原来的 $\frac{3}{4}$ 倍，纵坐标不变
- C. 纵坐标伸长到原来的 $\frac{4}{3}$ 倍，横坐标不变
- D. 纵坐标伸长到原来的 $\frac{3}{4}$ 倍，横坐标不变

〔练习 4〕 一简谐运动的正弦波图为函数 $y = 4\sin(2x + \frac{\pi}{5})$ ，则它的振幅为_____，周期为_____，频率为_____，相位为_____，初相为_____.

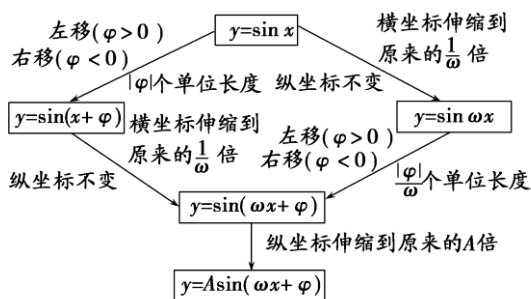
【例一】 将函数 $y = 3\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图像向左平移 $\frac{1}{3}$ 个周期后得到函数 $y = g(x)$ 的图像，则 $g(x)$ 解析式为_____.

【例二】 如何由 $y = \sin x$ 得到 $y = 2\cos(-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4})$ 的图象:

答: _____

5.6.2 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象（习题课）

【知识点复习】三角函数图象变换的两种途径流程如下(其中 $A > 0, \omega > 0, x \in \mathbf{R}$):



【复习检测】

1、下列说法正确的是()

- A. $y = \cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y = \sin x$ 的图象
- B. $y = \sin x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度得到 $y = \cos x$ 的图象
- C. $y = \sin x$ 的图象上所有点的横坐标都变为原来的 2 倍所得图象的解析式是 $y = \sin 2x$
- D. $y = \sin x$ 的图象上所有点的纵坐标都变为原来的 2 倍所得图象的解析式是 $y = \frac{1}{2}\sin x$

2、要得到 $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$ 的图象, 只需将 $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

3、将函数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 再将所得图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 则所得函数图象对应的解析式为()

- A. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- C. $y = \sin \frac{1}{2}x$ D. $y = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$

4、(1) 将函数 $y = \cos x$ 图象点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$ 倍(纵坐标不变), 所得图象的解析式为_____.

(2) 将函数 $y = \sin(-2x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 所得函数图象的解析式为_____.

【范例解析】

【例一】(1) 用五点法画出函数 $y = 2\sin\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $x \in [0, 6\pi]$ 上的简图. (五点作图法)

解: 先列表, 后描点连线:

(2) 某同学用“五点法”画函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 在一个周期内简图时, 列表如下:

$\omega x + \varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
y	0	2	0	-2	0

则有()

- A. $A=2, \omega=\frac{\pi}{12}, \varphi=0$ B. $A=2, \omega=3, \varphi=\frac{\pi}{12}$
- C. $A=2, \omega=3, \varphi=-\frac{\pi}{4}$ D. $A=1, \omega=2, \varphi=-\frac{\pi}{12}$

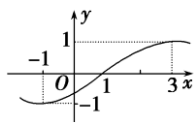
【例二】(1) 已知简谐运动 $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}x + \varphi\right)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象经过点 $(0, 1)$, 则该简谐运动的最小正周期 T 和初相 φ 分别为()

- A. $T=6, \varphi=\frac{\pi}{6}$ B. $T=6, \varphi=\frac{\pi}{3}$
- C. $T=6\pi, \varphi=\frac{\pi}{6}$ D. $T=6\pi, \varphi=\frac{\pi}{3}$

(2) 函数 $y = 2\sin(-2x + \frac{\pi}{3})$ 的相位和初相分别是()

- A. $-2x + \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ B. $2x - \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$
- C. $2x + \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ D. $2x + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

【例三】函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ ($A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$) 的图象如图，求函数表达式.



【例四】(1)(多选题)已知函数 $f(x)=\sin x \cos x - \cos^2 x$ ，下列命题正确的是()

A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π

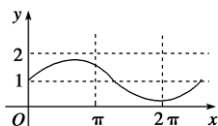
B. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{8})$ 上为增函数

C. 直线 $x=\frac{3\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

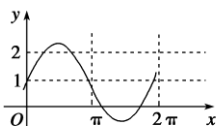
D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$ 的图

象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度得到

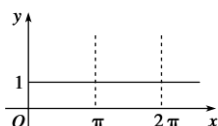
(2) 已知 a 是实数，则函数 $f(x)=1+a\sin ax$ 的图象不可能是()



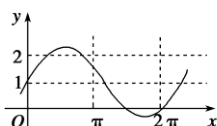
A



B



C



D

【例五】函数 $f(x)=2\sin \omega x$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递减，则 ω 的取值范围为_____.

【例六】将函数 $f(x)=4\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega>0, -\pi<\varphi<\pi$) 的图象上各点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍，得到 $g(x)=4\sin x$ 的图象.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{5}]$ 上的值域;

(3) 求证：对任意 $\lambda>0$ ，都存在 $\mu>0$ ，使 $f(x)+x-4<0$ 对 $x\in(-\infty, \lambda\mu)$ 恒成立.

必修第2册 第六章、平面向量及其应用

6.1 向量的物理背景与几何表示

【学习目标】

1. 了解向量的物理背景及在物理中的意义
2. 理解向量、零向量、单位向量、相等向量的概念，会用字母表示向量，能读写已知图中的向量；
3. 掌握向量的几何表示，明确向量的长度、零向量、单位向量的几何意义；
4. 了解共线向量、平行向量的概念，会根据图形判定是否平行、共线、相等。

【预习任务自测】

1. 我们把既有_____又有_____的量叫做向量，如：力、位移、速度、加速度等，向量包括两要素：_____、_____，缺一不可。

2. 我们把具有_____的线段叫做有向线段，以A为起点，B为终点的有向线段记作_____，线段AB的长度也叫做有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的长度，记作_____。有向线段包括三个要素：_____、_____、_____。

3. 向量的表示方法有两种，即_____表示或_____表示。

4. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小，也就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度叫做_____，记作_____。

5. 长度为零的向量叫做_____，记作_____；长度等于1个单位的向量叫做_____。

6. _____相等且_____相同的向量叫做相等向量，若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等，则记作_____；_____的非零向量叫做平行向量，也叫_____，规定 $\mathbf{0}$ 与任何一非零向量平行。

【新课引入】

您能列举物理学中哪些量既有大小，又有方向吗？_____、_____、_____等等。

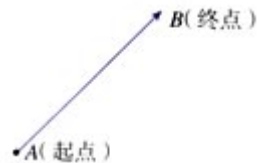
数学中的概念	特性	常用表示方法	物理学中的概念
向量	既有_____， 又有_____。		
数量	只有_____， 没有_____。		

★问题1：向量与数量有什么区别？

〔练习1〕下列量当中，是向量的有_____（填序号）

①质量；②速度；③位移；④浮力；⑤加速度；⑥路程；⑦功；⑧压强；⑨密度。

★问题2：向量如何表示？



★问题3：向量可以用有向线段

表示，那么向量就是有向线段

吗？为什么？

〔点拨〕有向线段与向量的区别和联系

区别	从定义上看，向量有大小和方向两个要素，而有向线段有起点、方向、长度三个要素。因此，这是两个不同的量。在空间中，有向线段是固定的线段，而向量是可以自由平移的
联系	有向线段是向量的表示，并不是说向量就是有向线段，每一条有向线段对应着一个向量，但每一个向量对应着无数多条有向线段

为方便计算，引入两个特殊向量：零向量、单位向量。

★有关概念

名称	定义	记法
零向量	长度为 <u>0</u> 的向量叫做零向量	$\mathbf{0}$
单位向量	长度等于 <u>1</u> 个单位的向量，叫做单位向量	
相等向量	<u>长度</u> 相等且方向相同的向量叫做相等向量	$\mathbf{a}=\mathbf{b}$
	说明：任意两个相等的非零向量，都可用同一条 <u>有向线段</u> 来表示，并且与有向线段的起点无关。在平面上，两个长度相等且方向一致的有向线段表示同一个向量	
平行向量	方向 <u>相同</u> 或 <u>相反</u> 的非零向量叫做平行向量	$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$
	规定：零向量与任何向量都 <u>平行</u>	$\mathbf{0} \parallel \mathbf{a}$
	说明：任一组平行向量都可以平移到同一 <u>直线</u> 上，因此，平行向	

	量也叫 <u>有线</u> 向量	
相反向量	与 $\mathbf{a}$ 的模相等, 方向相反的向量叫做 $\mathbf{a}$ 的相反向量	$-\mathbf{a}$

易知: $-(-\mathbf{a}) = \underline{\hspace{2cm}}$

★问题 4: 零向量的表示方法、方向、与数 0 的区别?

★问题 5: 向量能比较大小吗? 为什么? 向量的模能比较大小吗?

★问题 6: 向量有两种表示法: , 其中用字母表示向量时印刷体与书写体有什么区别?

★问题 7: 向量相等应具备几个条件? 表示相等向量的有向线段一定完全重合吗? 它们之间可以是什么关系?

(☆注: 对于一个向量, 只要不改变它的方向和大小, 就可以任意移动, 因此, 相等向量是一类向量的集合。)

★问题 8: 什么是平行向量(共线向量)? 它与平行线段有什么区别?

(☆注: 特别地, 规定 $\mathbf{0}$ 有任意方向, 它与任一非零向量平行。)

〔练习 2〕下列命题中不正确的是 ()

- A. 零向量没有方向 B. 零向量只与零向量相等
C. 零向量的模为 0 D. 零向量与任何向量共线

〔练习 3〕下列命题中正确的是 ()

- A. 若 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a} = \pm \mathbf{b}$
B. 若 $|\mathbf{a}| > |\mathbf{b}|$, 则 $\mathbf{a} > \mathbf{b}$
C. 若 $|\mathbf{a}| = 0$, 则 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$
D. 若 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行

【例一】判断正误:

- (1) 单位向量都共线 ()
(2) 共线的单位向量都相等 ()

(3) 平行向量的方向一定相同 ()

(4) 相等的向量一定共线, 不相等的向量一定不共线 ()

(5) 起点不同, 但方向相同且模相等的向量是相等向量 ()

(6) 相等的向量, 若起点不同, 则终点一定不同 ()

(7) 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 且 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$ ()

(8) 若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不共线, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为锐角 ()

(9) 若向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线, 则 A、B、C、D 四点一定在同一直线上 ()

(10) 相等向量一定是共线向量, 共线向量也一定是相等向量 ()

(11) 向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 平行, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的方向相同或相反 ()

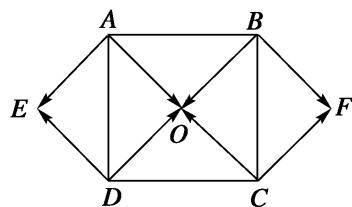
(12) 向量的模一定是正数 ()

【例二】(1) 在平面上把所有单位向量的起点平移到同一点 P, 那么它们的终点的集合组成什么图形?

答:

(2) 如图所示, 点 O 为正方形 ABCD 对角线的交点, 四边形 OAED、OCFB 都是正方形。

在图中所示的向量中:



(1) 分别写出与 $\overrightarrow{AO}$ 、 $\overrightarrow{BO}$ 相等的向量;

(2) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 共线的向量;

(3) 写出与 $\overrightarrow{AO}$ 的模相等的向量;

(4) 向量 $\overrightarrow{AO}$ 与 $\overrightarrow{CO}$ 是否相等?

6.2.1 向量的加法运算及几何意义

【学习目标】

1. 掌握向量加减法的定义，会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作两个向量的和向量；
2. 掌握向量的加法的交换律和结合律，并会用它们进行向量计算；
3. 掌握向量加法和向量减法的关系，会将向量的减法运算转化为向量加法运算来进行。

【重点】向量加法和向量减法的运算(三角形法则、平行四边形法则)、向量减法的几何意义

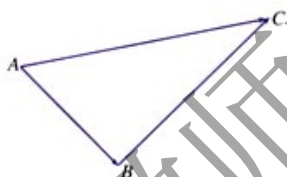
【难点】对向量加减法法则的理解

问题引入：数能进行运算，因为运算使数威力无穷，那么向量是否也能进行运算呢？

【探究 1】类比物理中的位移运算，某人从 A 点到 B 点再到 C 点，最后的结果是

位移 $\overrightarrow{AC}$ ，

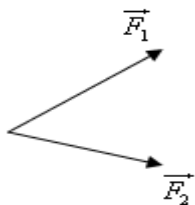
即： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (如图)



★问题 1：位移的加法遵守什么规律（法则）？

答：_____

【探究 2】类比物理学中力的运算，已知 $\overrightarrow{F_1}$ ， $\overrightarrow{F_2}$ ，求合力是怎样的运算的？（请作图表示）



★问题 2：力的加法遵守什么规律（法则）？

答：_____

结论一：向量加法的运算法则：_____法则 和 _____法则。

（☆注：如果 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线，则求加法运算只能用

_____法则）

特别地，规定： $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ 。

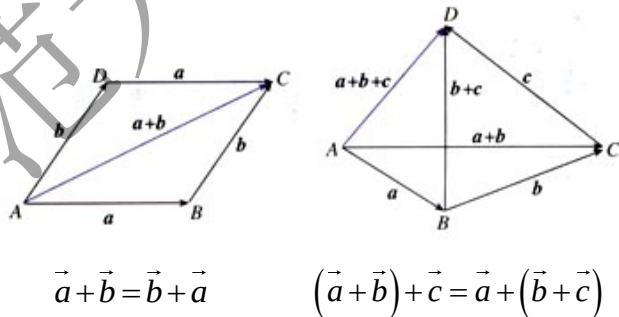
★问题 3：根据三角形的三边关系，很容易得出下列结论：

结论二： $|\vec{a} + \vec{b}|$ _____ $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ ， $|\vec{a} + \vec{b}|$ _____ $|\vec{a}| - |\vec{b}|$ 。

（☆思考：什么时候取等号？答：_____）

★问题 4：在定义了向量的加法后，自然会想知道向量的加法是否也满足加法的两个基本运算律：交换律、结合律？

【探究三】如下图，能否根据图形证明下面两个结论是否成立？

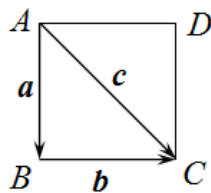


结论三：向量的加法运算满足交换律和结合律：

交换律： $\vec{a} + \vec{b} =$ _____

结合律： $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} =$ _____

【例一】作图计算：如图，已知正方形 ABCD 的边长等于 1，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ ，先在下图中作出向量 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ，并计算 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ 。



【探究3】类比数的减法法则：减去一个数等于加上这个数的相反数，向量的减法应如何定义？

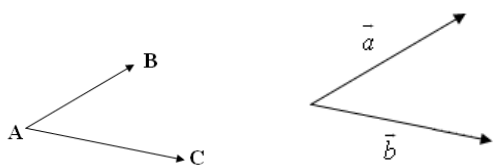
向量的减法法则：减去一个向量等于加上这个向量的_____，即 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (\quad)$ 。

(☆注：1. 零向量的相反向量还是_____；

2. $-(-\mathbf{a}) = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

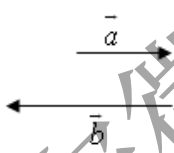
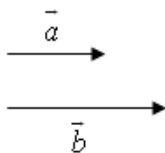
3. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} = -\mathbf{b}, \mathbf{b} = -\mathbf{a}.$)

【探究4】作图表示向量 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. (法则：_____)



★问题5：在上右图中，如果从 $\vec{a}$ 的终点向 $\vec{b}$ 的终点作向量得到的是向量_____；如果从 $\vec{b}$ 的终点向 $\vec{a}$ 的终点作向量得到的又是向量_____。

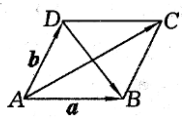
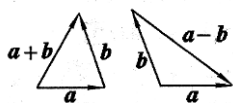
★问题6：如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线，在下面两图中分别作出 $\vec{a} - \vec{b}$ 。



结论四：向量减法的几何作法：若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 起点重合，则 $\vec{a} - \vec{b}$ 表示从向量_____的终点指向向量_____的终点的向量。

(☆注：向量减法跟加法一样有三角形法则和平行四边形法则，可用下面口诀区分它们区别：)

1. 三角形法则： $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ，首尾连，起点到终点； $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ，共起点，方向后指前。



2. 平行四边形法则： $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 位置分别在平行四边形的两条对角线上.)

【探究5】利用三角形法则得到下面关系：

向量的三角不等式

结论五： $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \underline{\hspace{1cm}} |\vec{a} \pm \vec{b}| \underline{\hspace{1cm}} |\vec{a}| + |\vec{b}|$ 。

【例二】化简：

(1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \underline{\hspace{1cm}}$ ； $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM}) = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

(3) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AB} = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

(4) $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}) = \underline{\hspace{1cm}}$. (一题多解)

【例四】判断正误：

(1) $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$ ()

(2) $|\mathbf{a}| - |\mathbf{a}| = \mathbf{0}$ ()

(3) 在 $\triangle ABC$ 中，必有 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$ ()

(4) 若非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同或相反，则 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 之一方向相同. ()

(5) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为三个不全共线的非零向量，且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ，则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 首尾相连可构成一个三角形. ()

(6) 若 $|\mathbf{a}| - |\mathbf{b}| \neq |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ ，则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 方向相同. ()

【例五】已知 $|\overrightarrow{AB}| = 7, |\overrightarrow{BC}| = 5$ ，则 $|\overrightarrow{AC}|$ 的取值范围是_____。

【例六】(1) 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}| = 3$ ， $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 5$ ，则 $|\mathbf{b}| = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

(2) 已知 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 6$ ，且 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 夹角为 60° ，则 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

6.2.2 向量的数乘运算及几何意义

【学习目标】

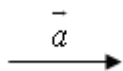
1. 掌握向量数乘运算法则，并理解其几何意义；
2. 让学生能由实数运算律类比向量运算律，并且验证强化对知识的形成过程的认识，正确表示结果；
3. 初步掌握向量共线的判定方法.

【重点】向量的数乘运算法则的理解及几何意义

【难点】对向量共线的判定条件的理解

【新课引入】

已知 $\vec{a}$ 如下图，作出向量 $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ 和 $-\vec{a} - \vec{a} - \vec{a}$ ，观察它们与 $\vec{a}$ 之间的关系.



【探究一】 通过观察发现： $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向____，大小是 $\vec{a}$ 大小的____倍； $-\vec{a} - \vec{a} - \vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向____，大小是 $\vec{a}$ 大小的____倍.

★问题 1：类比数的倍数关系（ $x + x + x = 3x$ ），我们也可以把 $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ 记作____，把 $-\vec{a} - \vec{a} - \vec{a}$ 记作____.

结论一：定义向量数乘的概念

规定实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个____，这种运算叫做____，记作____.

- (1) 当 $\lambda = 0$ 时，对任何向量 $\vec{a}$ ， $\lambda\vec{a}$ 都是_____.
- (2) 当 $\vec{a} = \vec{0}$ 时，对任何实数 λ ， $\lambda\vec{a}$ 也都是_____.
- (3) 当 $\lambda \neq 0, \vec{a} \neq \vec{0}$ 时， $\lambda\vec{a}$ 是非零向量，并且与 $\vec{a}$ _____：

① $\lambda\vec{a}$ 的长度： $|\lambda\vec{a}| = ______.$ ② $\lambda\vec{a}$ 的方向：当 $\lambda > 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ _____；当 $\lambda < 0$ 时， $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ _____.

★问题 2：你能说出向量数乘的几何意义吗？

结论二：向量数乘运算的几何意义是把向量 $\vec{a}$ 沿着 $\vec{a}$ 的方向或____方向 伸长 或____到原来的 $|\lambda|$ 倍.

【探究二】 填写下列结果，体验向量数乘运算律：

设 λ, μ 为实数，那么：

(1) $\lambda(\mu\vec{a}) = ______;$ ----- (结合律)

(2) $(\lambda + \mu)\vec{a} = ______;$ ----- (第一分配律)

(3) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = ______;$ ----- (第二分配律)

(4) $\lambda(-\vec{a}) = ______ = ______;$

(5) $\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = ______;$

(6) $\lambda(\mu_1\vec{a} \pm \mu_2\vec{b}) = ______.$ ---- (线性运算)

★问题 3：你能解释公式 (1) — (6) 的几何意义吗？

★问题 4：现在我们知道 $\vec{a}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 是共线的，那么如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线， $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 之间有什么关系？

结论三：(向量共线定理)

如果有一个实数 λ ，使 $\vec{b} = \lambda\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ ，那么 $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ _____；反之，如果 $\vec{b}$ 与 $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 是共线向量，那么一定有且只有一个实数 λ ，使_____. 特别地，与 $\vec{a} (\vec{a} \neq \vec{0})$ 同向的单位向量可表示为_____.

【思考】：如何找到这样的 λ ？ 答： $\lambda = ______.$

★问题 5：如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，但 $s\vec{a} + t\vec{b} = \vec{0}$ ，则实数 s 与 t 必须满足什么条件？

答： $s = ______, t = ______.$

【例一】 计算化简：

(1) $(-3) \cdot (-\vec{a}) = ______;$

(2) $3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{b}) - (\vec{a} + 5\vec{b}) =$ _____;

$$(3) \quad \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} (2\vec{a} + 8\vec{b}) - (4\vec{a} - 2\vec{b}) \right] = \underline{\hspace{2cm}};$$

(4) $(m+n)(a-b) - (m+n)(a+b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例二】 向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线的有 (填序号)

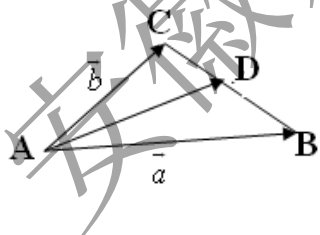
① $\mathbf{a} = 2\mathbf{e}, \mathbf{b} = -2\mathbf{e}$;

② $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{b} = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$;

$$\textcircled{3} \quad \boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{e}_1 - \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1 - \frac{1}{10}\boldsymbol{e}_2;$$

④ $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2.$

【例三】设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 点 D 是线段 BC 的中点, 用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$.



【变式 3-1】 若上题改为 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{e}_2$, 且 D 为 BC 中点, 求 $\overrightarrow{AC}$?

【变式 3-2】(08 全国) 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$,
若点 D 满足 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 则用 $\mathbf{c}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示 $\overrightarrow{AD}$.

【例四】 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，求证：
 $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

【变式 4-1】 若 O 是 $\triangle ABC$ 内一点，
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，则 O 是 $\triangle ABC$ 的（ ）

- A. 内心 B. 外心
C. 重心 D. 垂心

【变式 4-2】 若 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，若 $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ ，则直线 AP 一定经过 $\triangle ABC$ 的

- [illegible]

6.3.1 平面向量基本定理

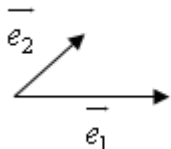
【学习目标】

1. 理解平面向量基本定理的内容, 了解向量一组基底的含义
2. 在平面内, 当一组基底选定后, 会用这组基底来表示其他向量
3. 了解向量夹角的概念, 理解向量夹角的范围及其几种特殊的夹角情况

【重点】理解并运用平面向量基本定理

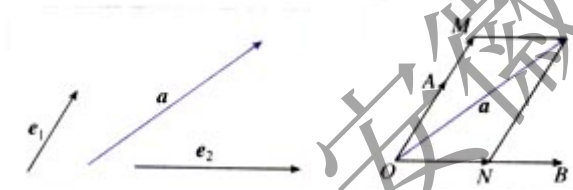
【难点】用选定的一组基底来表示其他向量

【复习引入】如图, 给定平面内任意两个不共线的向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$, 同时作出向量 $3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$ 和 $\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$.



★问题 1: 平面内的任一向量是否都可以用形如 $\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ 的向量表示呢?

★问题 2: 若可以, 如何找到这样的 λ_1 和 λ_2 ?



平面向量的基本定理: 如果 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 是同一平面内的两个 _____ 向量, 那么对于这一平面内的任意向量 $\vec{a}$, 有且只有一对实数 λ_1 、 λ_2 , 使 _____; 不共线的向量 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组 _____.

☆定理理解读:

1. 只有不共线的两个向量 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 才能充当基底;
2. 当基底 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 选定后, 平面内任一向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 下的分解式 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, λ_1, λ_2 存在且唯一;
3. 对于基底的选取不唯一, 只要是同一平面内的两个

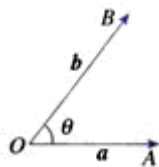
不共线向量都可以作为基底;

4. 同一非零向量在不同基底下的分解式是不同的, 但若 $\vec{0} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$, 则有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

向量的夹角: 已知两个 _____ 向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$, 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, 则 $\angle AOB = \theta$, (_____) 叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角.

当 $\theta = 0^\circ$ 时, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ _____;

当 $\theta =$ _____ 时, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向.



特别地, 如果 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是 90° , 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直, 记作 _____.

★问题 3: 怎样作图或找出两个向量的夹角?

注: 求两个向量的夹角, 一定要两个向量 _____.

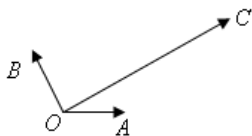
★问题 4: 向量的夹角的范围是多少? _____ 它与直线的夹角有什么不同?

【例一】已知 $\vec{e}_1$ 、 $\vec{e}_2$ 是同一平面 α 内不共线的任意两个向量, 下列说法中正确的有 _____.

- ① $\vec{a} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) 可以表示平面 α 内的所有向量;
- ② 对于平面 α 内任一向量 $\vec{a}$, 使 $\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$ 的实数 λ, μ 有无穷多对;
- ③ 若向量 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2$ 与 $\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2$ 共线, 则有且只有一个实数 λ , 使得 $\lambda_1\vec{e}_1 + \mu_1\vec{e}_2 = \lambda(\lambda_2\vec{e}_1 + \mu_2\vec{e}_2)$;
- ④ 若实数 λ, μ 使得 $\lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2 = \vec{0}$, 则 $\lambda = \mu = 0$;
- ⑤ 若 $\vec{a} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$, 则向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 可作为一组基底.

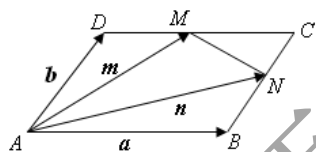
【例二】(1) 已知 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60° , 则 $\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 的夹角为 _____, $\vec{a} - \vec{b}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 _____.

(2) 如图, 平面内三个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, 其中 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 120° , $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 30° , 且 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$, $|\overrightarrow{OC}| = 2\sqrt{3}$. 若 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 则 $\lambda + \mu$ 的值为 _____.

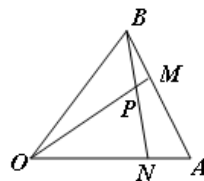


【例三】如图, M、N 分别为 $\square ABCD$ 中 CD、BC 的中点, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AM} = \mathbf{m}$, $\overrightarrow{AN} = \mathbf{n}$.

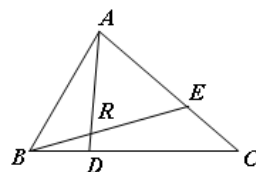
- (1) 以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为基底, 表示 $\overrightarrow{MN}$;
- (2) 以 $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ 为基底, 表示 $\overrightarrow{MN}$;
- (3) 以 $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ 为基底, 表示 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$.



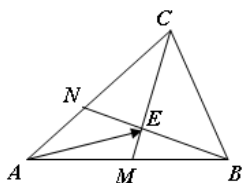
【变式 1】在 $\triangle OAB$ 中, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 设点 M 分 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比为 2:1, 点 N 分 $\overrightarrow{OA}$ 所成的比为 3:1, 而 OM 和 BN 交于点 P, 试以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为一组基底表示 $\overrightarrow{OP}$.



【变式 2】如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D、E 分别在边 BC、AC 上, 且 $BD = \frac{1}{4}BC$, $CE = \frac{1}{3}CA$, AD 与 BE 交于 R 点, 求向量法求 $\frac{RE}{BE}$ 的值.



【例四】如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是 AB 的中点, 且 $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$, BN 与 CM 相交于 E, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 试用基底 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AE}$.



6.3.2 平面向量的正交分解与坐标运算

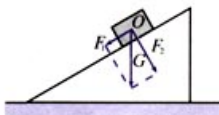
【学习目标】

1. 了解平面向量的正交分解，掌握向量的坐标表示，理解在平面直角坐标系内，每一个平面向量都可以用一有序数对唯一表示
2. 熟练两个向量和、差及向量数乘的坐标运算法则
3. 感受向量坐标形式的优越性，体验向量的几何形式与坐标形式的数形转化

【重点】掌握向量正交分解下的坐标表示与运算法则

【难点】正确理解向量坐标的概念，把点的坐标与向量的坐标区分开来

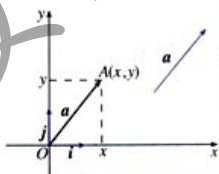
【情境引入】如图，光滑斜面上一个木块受到重力 G 的作用，而重力 G 可看作是沿斜面的力 F_1 与垂直斜面的力 F_2 的合力，而 F_1 和 F_2 可看作是 G 的分解。



★问题 1: 类似地，任意一个向量都能沿给定的一组基底进行分解吗？

特别地，把一个向量分解为两个互相垂直的向量，叫做把向量正交分解。

★问题 2: 在平面直角坐标系中，每一个点都可以用一对有序数对（即坐标）来表示，对直角坐标平面内的每一向量，应如何表示？



在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、 y 轴方向相同的两个单位向量 i 、 j 作为基底，对于平面上的一个向量 a ，有且只有一对实数 x 、 y ，使得 $a = x i + y j$. 有序数对 (x, y) 叫做向量 a 的（直角）坐标，记作 (x, y) . 这里， $i = (1, 0)$ ， $j = (0, 1)$ ， $0 = (0, 0)$.

在直角坐标平面中，以原点 O 为起点作 $\overrightarrow{OA} = a$ ，则点

A 的位置由向量 a 唯一确定。

★问题 3: 向量的坐标就是它的终点的坐标吗？

一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去起点的坐标。

特别地，当向量起点为坐标原点时，向量的坐标等于向量终点的坐标。

★问题 4: 点的坐标与向量的坐标有什么区别与联系？

1. 点 A 的坐标记为 (x, y) ，向量 a 的坐标记为 (x, y) 。

2. 两个结论：

①若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，则 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ；

②若 $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ，则有 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ 。

向量的坐标运算法则：若 $a = (x_1, y_1)$ ， $b = (x_2, y_2)$ ，

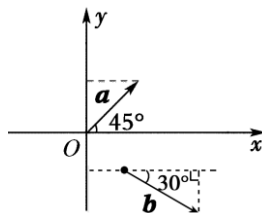
① $a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

② $a - b = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

③ $\lambda a = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

④ $\lambda a + \mu b = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)

【例一】如图，在直角坐标系 xOy 中，向量 a 、 b 的方向如图所示，且 $|a| = \sqrt{2}$ ， $|b| = 2$ ，分别计算出下列向量的坐标：



$a = (\sqrt{2} \cos 45^\circ, \sqrt{2} \sin 45^\circ) = (1, 1)$;

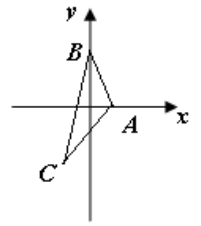
$b = (2 \cos 30^\circ, -2 \sin 30^\circ) = (\sqrt{3}, -1)$;

$a + b = (1 + \sqrt{3}, 1 - 1) = (1 + \sqrt{3}, 0)$;

若 $c = (2, 1)$ ，则 $a + 2b - 3c = (1 + \sqrt{3} - 4, 0 - 2 - 3) = (-3 + \sqrt{3}, -5)$.

【例二】 已知 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-1, 5)$, $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b} = (-6, 19)$, 求 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

【例五】 已知点 $A(1, 0), B(0, 2), C(-1, -2)$, 求以 A、B、C 为顶点的平行四边形的第四个顶点 D 的坐标.



【例三】 已知 $A(1, -2), B(2, 1), C(3, 2), D(6, 9)$, 试用 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 表示 $\vec{AD}$.

【思考】 如果两个向量共线，它们的坐标之间有什么关系？

【例四】 已知 $A(3, -5), B(-1, 3)$, 点 C 在线段 AB 上, 且 $\vec{AC} = 3\vec{CB}$, 则点 C 的坐标是_____.

6.3.3 平面向量的共线的坐标表示

【学习目标】

1. 理解并掌握平面向量共线的坐标表示的公式, 了解它的另一种表示形式, 并会应用它们来判定两向量共线
2. 体会用坐标形式解决向量共线问题的快捷与方便, 进一步体验向量的几何形式与坐标形式的转化及坐标形式的优越性

【重点】平面向量共线的坐标表示的公式

【难点】平面向量共线的坐标表示的公式的应用

【复习引入】 $\vec{a}$ 与 $\lambda\vec{a}(\lambda \neq 0)$ 之间有什么关系? _____

★问题 1: 如果 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 且 $\vec{b} \neq \vec{0}$, 那么 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线时它们的坐标之间有什么关系?

推导: $\because \vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, 则 _____
即 _____

结论一: 当且仅当 _____ 时, 向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0})$ 共线.

★问题 2: 向量共线的条件能写成比例的形式吗?

即能否改为 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \Leftrightarrow \vec{a}$ 与 $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0})$ 共线.

结论二: 若 _____ 且 _____, 则有 _____.

【例一】判断下列向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 是否平行:

① $\vec{a} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \vec{b} = (-2, -3)$

② $\vec{a} = (0.5, 4), \vec{b} = (-8, 64)$

③ $\vec{a} = (2, 3), \vec{b} = (3, 4)$

【例二】(1) 已知 $\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (6, y)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $y =$ _____.

(2) 已知 $\vec{a} = (-2, 1 - \cos \theta), \vec{b} = (1 + \cos \theta, -\frac{1}{4})$,

且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则锐角 θ 的值为 _____.

(3) 向量 $\vec{a} = (2, m-1)$ 与 $\vec{b} = (m-2, 6)$ 共线且方向相同, 则 $m =$ _____.

(4) 在四边形 ABCD 中, 四点坐标为 $A(0, 0), B(1, 4), C(4, 7), D(3, 1)$, 则四边形 ABCD 的形状为 _____.

(5) 已知 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (-3, 2)$, 当 k 为何值时, $k\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - 3\vec{b}$ 平行? 平行时它们是同向还是反向?

★问题 3: 如果坐标系中有三点 A、B、C, 如何才能知道这三点是否在同一条直线上?

【例二】向量 $\vec{OA} = (k, 12), \vec{OB} = (4, 5), \vec{OC} = (10, k)$, 当 k 为何值时, A、B、C 三点共线.

【例三】已知向量 $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{OB} = (6, -3)$,

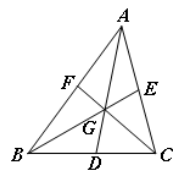
(1) 若点 P 是 AB 中点, 则点 P 坐标为_____;

(2) 若点 P 是线段 AB 靠近点 A 的一个三等分点, 则点 P 的坐标为_____;

(3) 若点 P 在线段上, 且 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$ (λ 为一常数) 时, 求点 P 的坐标?

【例四】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$

$C(x_3, y_3)$, 求 $\triangle ABC$ 的重心 G 的坐标.



结论: 平面向量 定比分点坐标公式:

若点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P(x, y)$, λ 为正实数,

点 P 在线段 P_1P_2 上, 且 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$, 则点 P 的坐标

为_____, 我们称 λ 为点 P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比.

特别地, 当点 P 是 P_1P_2 的中点时, 坐标为_____.

(注: 在中点公式中, 三点 P, P_1, P_2 中知二求一)

【思考】若 $\overrightarrow{P_1P} = \lambda \overrightarrow{PP_2}$, 且 $\lambda < 0$ 时, 点 P 的位置在哪? 此时上面的结论还适用吗?

【练习】已知 $A(2, 3), B(4, -3)$, 点 P 在线段 AB 的延长线上, 且 $|\overrightarrow{AP}| = \frac{3}{2} |\overrightarrow{PB}|$, 则点 P 的坐标为_____.

6.4.1 平面向量数量积的物理背景及含义

【学习目标】

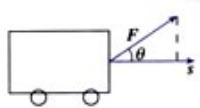
1. 了解平面向量数量积的物理背景——物体在力 F 作用下产生位移 s 所做的功
2. 掌握平面向量数量积的定义，理解其几何意义
3. 掌握平面向量数量积的运算律，了解向量的数量积与向量数乘、实数乘法的区别
4. 会用两个向量的数量积判断它们的夹角及垂直关系

【重点】平面向量数量积的定义、几何意义及运算

【难点】向量的数量积与向量数乘、实数乘法的区别

【情境引入】如图，一个物体在力

F 的作用下产生位移 s ，那么力 F 所做的功



$W =$ _____

(其中 θ 是 F 与 s 的夹角)

★问题 1: 功是一个标量，但却是由力和位移两个向量来确定的，那么，能否把“功”看成是这两个向量的一种运算？如果可以，这种运算应如何定义？

平面向量的数量积:

已知两个非零向量 a 与 b ，我们把数量 $|a||b|\cos\theta$ 叫做 a 与 b 的 _____ (或内积、点积)，记作 _____

即:

(其中 θ 是 a 与 b 的夹角)，特别规定，零向量与任一向量的数量积为 _____，即 $0 \cdot a =$ _____.

★问题 2: 向量的数量积是一个数量，那么它什么时候为正？什么时候为负？

定义解读:

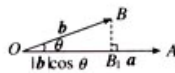
(1) 两个向量的数量积是一个 _____；它的符号由 _____ 决定:

① 当 $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ 时， $a \cdot b$ _____ 0;

② 当 $\theta = 90^\circ$ 时， $a \cdot b$ _____ 0;

③ 当 $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时，

$a \cdot b$ _____ 0.



(2) 两个向量 a, b 的数量积 $a \cdot b$ (点积) 在表示时，中间的“ $\cdot$ ” 不能用“ $\times$ ”替换，更不能省略不写。

(3) 应当注意 $0 \cdot a = 0$ ，但 $0 \cdot a = a \cdot 0 =$ _____.

(4) 两个非零向量 $a \perp b \Leftrightarrow$ _____.

(5) 其中 _____ 叫做向量 a 在 b 方向上的投影，
_____ 叫做 b 在 a 方向上的投影。

注: $a \cdot b$ 的几何意义是: _____

【探究一】平面向量数量积的性质:

(1) 若 _____，则 $a \cdot b = 0$ ；若 $a \cdot b = 0$ ，则 _____.

(2) 当 a 与 b 同向时， $a \cdot b =$ _____；

当 a 与 b 反向时， $a \cdot b =$ _____；

特别地， $a \cdot a = a^2 =$ _____，故 $|a| =$ _____.

(3) _____ $\leq a \cdot b \leq$ _____，即 $|a \cdot b| \leq$ _____.

(4) θ 是 a 与 b 的夹角，则 $\cos \theta =$ _____.

注: 利用性质 $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 可以证明向量共线.

【探究二】平面向量数量积的运算律: ($\lambda \in \mathbb{R}$)

(1) $a \cdot b =$ _____;

(2) $(\lambda a) \cdot b =$ _____;

(3) $(a+b) \cdot c =$ _____;

(4) $(a+b)^2 =$ _____; $(a-b)^2 =$ _____;

(5) $(a+b) \cdot (a-b) =$ _____;

(6) $(a+b+c)^2 =$ _____;

(7) $|a+b|^2 + |a-b|^2 =$ _____;

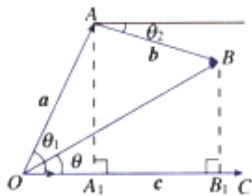
★问题 3: 你能推导出上面的运算律吗？特别是 (3)。

【探究三】运算律 (3) 的推导:

如图，任取一点 O ，作 $\overrightarrow{OA} = a$ ， $\overrightarrow{AB} = b$ ， $\overrightarrow{OC} = c$ ，

显然: $|\overrightarrow{OB}| \cos \theta =$ _____ + _____

即

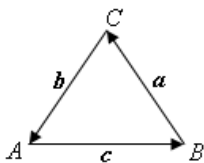


【例一】(1) 若 $|a|=4, |b|=5$ ，且 $a \cdot b = -10$ ，则 a 与 b 的夹角 θ 为_____.

(2) 已知 $|b|=3$ ， a 在 b 方向上的投影是 $\frac{3}{2}$ ，则

$a \cdot b =$ _____.

(3) 在边长为 $\sqrt{2}$ 的正 $\triangle ABC$ 中，设 $\overrightarrow{AB} = c$ ， $\overrightarrow{BC} = a$ ， $\overrightarrow{CA} = b$ ，则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a =$ _____.



【例二】已知 $|a|=6, |b|=4$ ， a 与 b 的夹角为 60° ，求 $(a+2b) \cdot (a-3b)$ 。

【例三】已知 $|a|=3, |b|=4$ ，且 a 与 b 不共线， k 为何值时，向量 $a + kb$ 与 $a - kb$ 互相垂直。

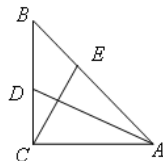
【例四】(1) 已知 $|a|=10, |b|=8, |a+b|=2\sqrt{61}$ ，求 a 与 b 的夹角 θ 。

(2) 已知 $|a|=3, |b|=4, (a+b) \cdot (a+3b)=33$ ，求 a 与 b 的夹角 θ 的值。

(3) 已知向量 a, b, c 满足 $a+b+c=0$ ，且 $|a|=5, |b|=7, |c|=10$ ，求 a, b 的夹角的余弦值。

(4) 已知非零向量 a, b 满足 $a+3b$ 与 $7a-5b$ 互相垂直， $a-4b$ 与 $7a-2b$ 互相垂直，求 a 与 b 的夹角。

【例五】如图，在等腰直角三角形 ABC 中， $\angle C=90^\circ$ ， D 是 BC 的中点， E 是 AB 上一点，且 $AE=2EB$ ，求证： $AD \perp CE$ 。



6.4.2 平面向量数量积的坐标表示、模、夹角

【学习目标】

1. 经历两个向量数量积坐标公式的推导过程，能熟练地运用数量积的坐标公式进行向量数量积的运算
2. 能运用两个向量数量积的坐标公式熟练地推导出向量模的公式和向量夹角公式的坐标形式，并能利用公式熟练的计算模与夹角
3. 通过向量数量积的坐标表示及其应用，从向量的角度再一次体验数形转化这一重要的数学思想

【重点】数量积的坐标表示及模、夹角公式

【难点】已知相关向量的坐标求解向量的模与夹角

★问题 1: 我们已经学习了向量的数量积运算，而且知道数量积的结果是一个数量。同时我们又学习了向量的坐标表示及坐标运算，那么，怎样用向量的坐标形式来表示两向量的数量积呢？

【探究一】 已知两个非零向量 $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$, 求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.推导: $\because \mathbf{a} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}, \mathbf{b} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j},$

$$\therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$$

向量数量积的坐标表示:

两个向量的数量积等于_____

即: 若 $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2),$

$$\text{则 } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \underline{\hspace{2cm}}$$

解读: ① 特别地, $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ ② 若 $\mathbf{a} = (x, y)$, 则有 $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}^2 = \underline{\hspace{2cm}},$ 即: $|\mathbf{a}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

★问题 2: 上面的解读②给我们一个什么启示?

【探究二】 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 求 $|\overrightarrow{AB}|$.

两点间的距离公式:

如果向量 $\mathbf{a}$ 的起点坐标和终点坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 那么 $|\mathbf{a}| = \underline{\hspace{2cm}}.$

两向量夹角公式的坐标形式:

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 都是非零向量, $\mathbf{a} = (x_1, y_1), \mathbf{b} = (x_2, y_2)$, θ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 依 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ 可得:

$$\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

【例一】 (1) 已知向量 $\mathbf{a} = (-5, 6), \mathbf{b} = (6, 5)$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ ()

A. 垂直

B. 不垂直也不平行

C. 平行且同向

D. 平行且反向

(2) 已知 $\mathbf{a} = (3, 4)$, 则与 $\mathbf{a}$ 垂直的单位向量是_____.(3) 平面向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 中, 已知 $\mathbf{a} = (4, -3), |\mathbf{b}| = 1$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5$, 则向量 $\mathbf{b} = \underline{\hspace{2cm}}.$ (4) 已知向量 $\vec{a} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 向量 $\vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$ 则 $|2\vec{a} - \vec{b}|$ 的最大值, 最小值分别是 ()A. $4\sqrt{2}, 0$ B. $4, 4\sqrt{2}$ C. $16, 0$ D. $4, 0$ (5) 已知点 $A(-1, 1), B(1, 2), C(-2, -1), D(3, 4)$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BD}$ 方向上的投影为_____.

【例二】(1) 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为单位向量, 它们的夹角为 60° , 那么 $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知向量 $\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (-2, -4), |\vec{c}| = \sqrt{5}$, 若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【例三】(1) 已知 $\vec{a} = (1, -2), \vec{b} = (1, \lambda)$, 且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ 为锐角, 则实数 λ 的取值范围是()

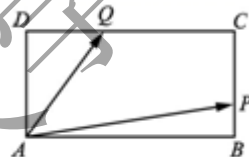
- A. $(-\infty, -2) \cup (-2, \frac{1}{2})$
 B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$
 C. $(-2, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$
 D. $(-\infty, \frac{1}{2})$

(2) 设 $\vec{a} = (2, x), \vec{b} = (-4, 5)$, 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角, 求 x 的取值范围.

【变式】在直角 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AB} = (2, 3), \vec{AC} = (1, k)$, 求实数 k 的值. (请说明和例四有什么不同, 不要求解出最后解)

【例五】已知 $\vec{a} = (2, 1)$ 与 $\vec{b} = (1, 2)$, 要使 $|\vec{a} + t\vec{b}|$ 最小, 则实数 t 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【例六】如图, 已知矩形 $ABCD$ 的边长 $AB = 2, AD = 1$. 点 P, Q 分别在边 BC, CD 上, 且 $\angle PAQ = 45^\circ$, 则 $\vec{AP} \cdot \vec{AQ}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



【例七】已知 A, B, C 是单位圆上三个互不相同的点, 若 $|\vec{AB}| = |\vec{AC}|$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 的最小值是()

- A. 0
 B. $-\frac{1}{4}$
 C. $-\frac{1}{2}$
 D. $-\frac{3}{4}$

【例四】已知在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{AB} = (2, 3), \vec{AC} = (1, k)$, 且 $\triangle ABC$ 中 $\angle C$ 为直角, 求 k 的值.

6.5.3 平面向量在数学上的应用举例

【学习目标】

1. 能够运用向量的有关知识(向量加减法与向量数量积的运算法则等)解决平面几何和解析几何中直线或线段的平行、垂直、相等、夹角和距离等问题
2. 体会和掌握用平面向量解决平面几何问题的两种方法——向量法和坐标法
3. 初步利用构造向量的思想解决数学中的最值问题

【重点】用向量知识解决平面几何问题

【难点】选择适当的方法,将数学问题转化为向量问题解决

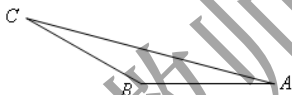
1. 如果 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 且 $\vec{b} \neq \vec{0}$, 则

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

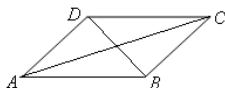
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

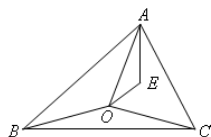
【例一】用向量法求解: 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=7$, $BC=8$, $\angle ABC=120^\circ$, 求 AC 的长.



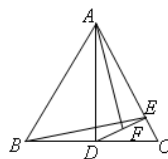
【变式一】如图, 平行四边形 $ABCD$ 中, 已知 $AD=1$, $AB=2$, 对角线 $BD=2$, 求对角线 AC 的长.



【例二】如图所示, O 是 $\triangle ABC$ 的外心, E 为三角形内一点, 满足 $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, 求证: $\vec{AE} \perp \vec{BC}$.



【变式二】如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, D 是 BC 的中点, $DE \perp AC$, E 是垂足, F 是 DE 的中点. 求证: $AF \perp BE$.



【点评】

用向量方法解决平面几何问题的步骤:

- ① 建立平面几何与向量的联系, 用向量表示问题中涉及的几何元素, 将平面几何问题转化为向量问题
- ② 通过向量运算, 研究几何元素之间的关系和距离、夹角等
- ③ 把运算结果“翻译”成几何关系.

2. 用向量法构造解题时常用到的两个不等式:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq \sqrt{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

如果 $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2)$, 则

$$|x_1 x_2 + y_1 y_2| \leq \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$$

【例三】已知 $x^2 + y^2 = 3, a^2 + b^2 = 4$,
($x, y, a, b \in \mathbb{R}$), 求 $ax + by$ 的最值.

【变式三】已知 $x^2 + y^2 = 1, a^2 + b^2 = 1$ 求证:
 $ax + by \leq 1$.

【例四】已知 $y = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(1-x)^2 + 4}$, 求 y 的最小值.

【变式四】(09 黄冈) 利用向量方法解答下列各题:

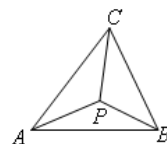
(1) 设 a, b 为不相等的正数, 求证:

$$(a^4 + b^4)(a^2 + b^2) > (a^3 + b^3)^2;$$

(2) 对于 $x \in \mathbb{R}$, 试求函数

$$y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$$
 的值域.

【例五】如图所示, 在 $\triangle ABC$ 内求一点 P 使
 $AP^2 + BP^2 + CP^2$ 最小.



【练习】

1. 已知 $a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = 1$. 求证: $a^2 + b^2 = 1$.

2. 已知 $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$, 用构造向量法求
 $6x - 8y$ 的最值.

6.5.4 平面向量在物理学上的应用举例

【学习目标】

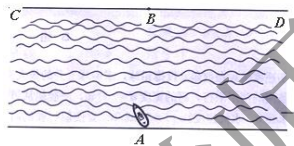
1. 运用向量的有关知识(向量加减法与向量数量积的运算法则等)解决简单的物理(力向量和速度向量)问题,体验向量在物理问题中的工具作用
2. 理解和掌握用向量知识研究物理中的相关问题的“四环节”

【重点】利用向量方法解决与物理相关的实际问题

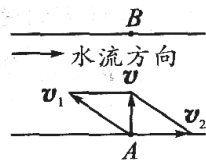
【难点】选择适当的方法,建立以向量为主的数学模型,把物理问题转化为数学问题

【例一】如图,一条河的两岸平行,河的宽度 $d=500\text{m}$,一艘船从 A 处出发到河对岸,已知船的速度 $|\mathbf{v}_1|=10\text{ km/h}$,水流速度 $|\mathbf{v}_2|=2\text{ km/h}$,问行驶航程最短时,所用时间是多少(精确到 0.1 min ,参考数据:

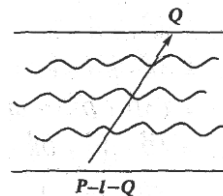
$$\frac{1}{\sqrt{96}} \approx 0.102)$$



【变式一】一条河宽为 400m ,一船从 A 出发航行垂直到达河正对岸的 B 处,船速为 20km/h ,水速为 12km/h . 则船到达 B 处所需时间为_____min.



【变式二】今有一小船位于 $d=60\text{m}$ 宽的河边 P 处,从这里起,在下游 $l=80\text{m}$ 处河流有一瀑布.若河水流速方向由上游指向下游(与河岸平行),水速大小为 5m/s . 如右图所示,为了使小船安全渡河,船的划速不能小于多少?当划速最小时,划速方向如何?



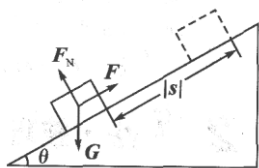
【变式三】在风速为 $75(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{ km/h}$ 的西风中,飞机以 150km/h 的航速向西北方向飞行,求没有风时飞机的航速和航向.

【例二】质量 $m=2.0\text{kg}$ 的木块，在平行于斜面向上的拉力 $F=10\text{N}$ 的作用下，沿斜面角 $\theta=30^\circ$ 的光滑斜面向上滑行 $|s|=2.0\text{m}$ 的距离，如图所示。

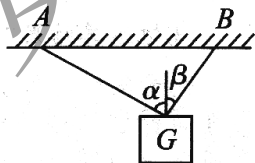
(1) 分别求物体所受各力在这一过程中对物体做的功；

(2) 在这一过程中，物体所受各力对物体做的功的代数和是多少？

(3) 求物体所受合外力对物体所做的功，并指出它与物体所受各个力对物体做功的代数和之间有什么关系。



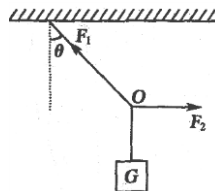
【变式一】如图，若物体重量为 G ，被两根不等长的绳子吊起，绳子两端点 A 和 B 保持同一高度，且绳子与竖直方向的夹角分别为 α 和 β ，试研究拉力 F_1 、 F_2 的大小。



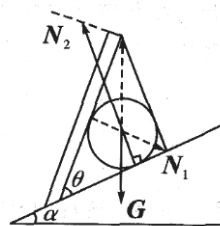
【变式二】如图所示，在细绳 O 处用水平力 F_2 缓慢拉起所受重力为 G 的物体，绳子与铅垂方向的夹角为 θ ，绳子所受到的拉力为 F_1 ，求：

(1) $|F_1|$ 、 $|F_2|$ 随角 θ 的变化而变化的情况；

(2) 当 $|F_1| \leq 2|G|$ 时， θ 角的取值范围。



【变式三】如图，重力为 G 的均匀小球放在倾角为 α 的斜面上，球被与斜面夹角为 θ 的木板挡住，球面、木板均光滑，若使球对木板压力最小，则木板与斜面间的夹角 θ 应为多大？



【点评】

用向量知识研究物理中的相关问题的“四环节”：

- ① 把物理问题转化为数学问题
- ② 建立以向量为主题的数学模型
- ③ 求出数学模型的有关解——理论参数值
- ④ 回到问题的初始状态，解释相关的物理现象。

6.4.3 余弦定理及其应用

【学习目标】

1. 理解并掌握余弦定理的推导过程, 体验向量运算的魅力所在
2. 会用余弦定理求解已知两边及夹角或三边的三角形的其他元素
3. 掌握余弦定理的变形形式, 并能运用此结论求解角度的相关问题

【重点】掌握余弦定理的推导并用余弦定理解三角形

【难点】运用余弦定理解三角形

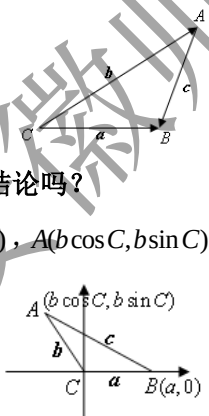
【新课引入】

【探究一】余弦定理的推导:

已知 $\triangle ABC$ 的两边长 $BC = a$, $AC = b$, 边 BC 和 AC 的夹角是 C , 问能否用含 a, b 和 C 的一个公式表示边 c ?

(引导思考: 由于涉及到两边及其夹角, 我们可以考虑_____途径来解决这个问题.)

推导: 如图, 设 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, 则 $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$,



★思考: 用坐标方法也能得到这个结论吗?

推导: 如图建立直角坐标系, 则 $B(a, 0)$, $A(b \cos C, b \sin C)$

(思考: 还有其它方法吗?)

余弦定理:

三角形中任何一边的平方等于其他两边的_____减去这两边与它们的夹角的余弦的积的_____.

即:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$c^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

★问题 1: 通过公式可以看出已知两边及夹角可求出第三边, 那么反过来, 已知三边如何求出三角形的三

个内角?

余弦定理还可以变形为:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \underline{\hspace{2cm}}; \cos C = \underline{\hspace{2cm}}$$

★问题 2: 勾股定理表现出的也是三边平方之间的关系, 那么勾股定理和余弦定理之间有什么关系?

$$a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Leftrightarrow C = 90^\circ \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 是 } Rt\triangle;$$

$$a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow \cos C \underline{\hspace{1cm}} \Leftrightarrow C \underline{\hspace{1cm}} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ 是 } \underline{\hspace{2cm}};$$

$$a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \cos C \underline{\hspace{1cm}} \Leftrightarrow C \underline{\hspace{1cm}}$$

由此可知, 勾股定理是余弦定理的_____, 余弦定理是勾股定理在斜三角形中的_____.

【例一】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 2, b = 2\sqrt{2}, C = 15^\circ$, 求角 A 大小.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b = 3, c = 3\sqrt{3}, B = 30^\circ$, 求 a .

注释: 一般地, 三角形的三个角 A, B, C 和它们的对边 a, b, c 叫做三角形的_____元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做_____解三角形_____.

由例一知道: 如果给定两边及一角或三边, 可以用余弦定理解此三角形.

【例二】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 - c^2 + b^2 = ab$, 则角 $C = \underline{\hspace{2cm}}.$

(2) $\triangle ABC$ 的三内角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c 设向量 $\vec{p} = (a+c, b)$, $\vec{q} = (b-a, c-a)$, 若 $\vec{p} \parallel \vec{q}$, 则角 C 的大小为_____.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = 7, b = 3, c = 5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____;

(4) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $(b+c):(c+a):(a+b) = 4:5:6$, 求 $\triangle ABC$ 的最大内角的余弦值.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $B = 60^\circ$, $b^2 = ac$, 则 $\triangle ABC$ 一定是 ()

- A. 锐角三角形 B. 钝角三角形
C. 等腰三角形 D. 等边三角形

【点评】条件 $a^2 + b^2 \pm ab = c^2$ 隐藏着 $\cos C = \pm \frac{1}{2}$, 要注意挖掘.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$, 且 $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$, 试确定 $\triangle ABC$ 的形状.

【例三】 (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a^2 + c^2 = b^2 + ac$, 且 $a:c = (\sqrt{3}+1):2$, 求角 C 的大小.

【例六】 在 $\triangle ABC$ 中, $m = (\cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2})$, $n = (\cos \frac{C}{2}, -\sin \frac{C}{2})$, 且 m 与 n 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$.

(2) (易错题) 在 $\triangle ABC$ 中, $C = 2A$, $a+c=1$, 求 b .

(1) 求 C ;

(2) 已知 $c = \frac{7}{2}$, 三角形的面积 $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $a+b$.

【例四】 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $4 \sin B \sin C = b^2 + c^2 - a^2 = bc$, 且 $B > C$, 求 A, B, C .

【例五】 (1) 已知钝角 $\triangle ABC$ 的三边 $a=k, b=k+2, c=k+4$, 则 k 的取值范围是

6.4.4 正弦定理及其应用

【学习目标】

1. 理解并掌握正弦定理，了解正弦定理的证明方法及其比值的几何意义
2. 会用正弦定理求解已知两角一边或两边及其一边所对的角的三角形的其他元素
3. 理解用正弦定理解三角形时，为什么会出现有两解、一解或无解的情况，并能画图分析各种情况成立的条件

【重点】理解正弦定理的推导并会用正弦定理解相关三角形

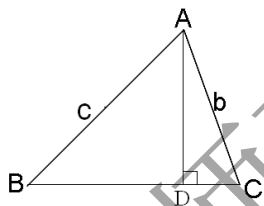
【难点】正弦定理的推导方法及应用

★问题 1：如果一个三角形已知两个角及其一条边，能否用余弦定理解此三角形？

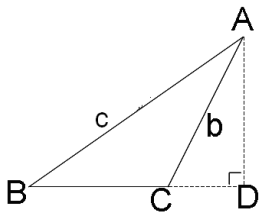
【探究一】 正弦定理的推导：

如图，当 $\triangle ABC$ 是锐角三角形时，设边 BC 上的高是 AD ，根据任意角三角函数的定义，有：

$$AD = \frac{c \sin B}{1} = \frac{b \sin C}{1}$$



★问题 2：当 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时，如右图，请写出证明的过程：

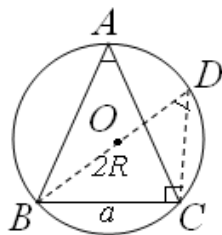


正弦定理： 在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$

★问题 3：正弦定理中比值 k 的几何意义是什么？

【探究二】 正弦定理比值的几何意义：

（引导思考：借助三角形的外接圆得到定理中比值 k 的几何意义，并利用画板进行直观感受）



1. 正弦定理

形式一： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ($2R$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的直径)

形式二： $\sin A = \frac{a}{2R}$ ； $\sin B = \frac{b}{2R}$ ； $\sin C = \frac{c}{2R}$ ；（角到边的转换）

形式三： $a = 2R \cdot \sin A$ ， $b = 2R \cdot \sin B$ ， $c = 2R \cdot \sin C$ ；（边到角的转换）

形式四： $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$ ；（求三角形的面积）

形式五： $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ （连比形式）
 $(a + b + c) : (\sin A + \sin B + \sin C) = \frac{a}{\sin A} : 1$ （等比性质）

形式六： $a \sin B = b \sin A$, $b \sin C = c \sin B$, $a \sin C = c \sin A$

2. 解决以下两类问题：

- 1)、已知两角和任一边，求其他两边和一角；（唯一解）
- 2)、已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角（从而进一步求出其他的边和角）。

3. 两个结论：

① 在 $\triangle ABC$ 中， $A > B \Leftrightarrow a > b \Leftrightarrow \sin A > \sin B$

② 若 $\triangle ABC$ 为锐角 $\triangle$ ，则 $A + B > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow A > \frac{\pi}{2} - B$
 $\Leftrightarrow \sin A > \cos B \Leftrightarrow \sin B > \cos A$

【例一】（1）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A = 75^\circ$ ， $B = 45^\circ$ ， $c = 3\sqrt{2}$ ，解三角形。

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=1, b=\sqrt{3}, A=30^\circ$, 解这个三角形.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $c=\sqrt{6}, C=\frac{\pi}{3}, a=2$, 求 A, B, b .

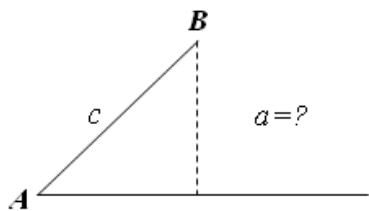
(4) 已知 $A=30^\circ, a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=\sqrt{3}$, 解三角形.

(5) 已知 $A=30^\circ, a=\frac{1}{2}, b=\sqrt{3}$, 解三角形.

【思考】: 通过例一及其三个变式, 我们发现已知两边和其中一边的对角, 求其他边和角时, 三角形会出现一解, 二解, 无解等情况, 那么请自己画图说明分别在什么条件下, 三角形出现一解, 二解和无解?

【探究三】给出两边及一边对角的条件解三角形时, 什么条件会出现两解、一解或无解?

如图, $\angle A=30^\circ, c=10, a=?$



结论: 如图, 已知 a, c 和 $\angle A$,

(1) 当_____时, 有两解;

(2) 当_____时, 恰有一解;

(3) 当_____时, 无解.

【例二】(1) $\triangle ABC$ 中, $a=1, b=3, \angle A=30^\circ$, 则满足这个条件的三角形的个数是 ()

A. 2 B. 1 C. 0 D. 不确定

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 根据下列条件解三角形, 其中有两解的是 ()

A. $b=8, \angle A=75^\circ, \angle C=45^\circ$

B. $a=20, b=15, \angle C=70^\circ$

C. $a=b=4, \angle A=75^\circ$

D. $a=7, b=8, \angle A=45^\circ$

【例三】(1) 若 $\triangle ABC$ 中, $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$, 且三角形的周长是 36, 则此三角形的最大角和最小角之和的余弦为_____.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B - \sin^2 C}{\sin B \sin C} = 1$, 则 $\angle A$ 的度数为_____.

(3) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a=8, (5b-3c)\cos A=24\cos C$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆的面积为_____.

【例四】在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{b-c}{b-a}$.

(1) 求角 A ;

(2) 若 $a=\sqrt{6}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

6.4.5 余弦定理和正弦定理的综合问题

1. 正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2R}{1}$.(其中 R 为外接圆的半径.)

2. 余弦定理:

$$\begin{cases} a^2 = \underline{\hspace{2cm}} \\ b^2 = \underline{\hspace{2cm}} \\ c^2 = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \underline{\hspace{2cm}} \\ \cos B = \underline{\hspace{2cm}} \\ \cos C = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

3. 三角形的面积公式:

(1) $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, (h_a, h_b, h_c 分别表示 a, b, c 边上的高);

$$(2) S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B;$$

$$(3) S_{\Delta} = \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot r, (r \text{ 为 } \Delta ABC \text{ 内切圆半径});$$

(4) $S_{\Delta} = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$, (R 为 ΔABC 外接圆半径);

$$(5) S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}, (R \text{ 为 } \Delta ABC \text{ 外接圆半径});$$

$$(6) S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, (p = \frac{1}{2}(a+b+c))$$

——海伦公式).

【例一】(易错题小练)

(1) 在 ΔABC 中, 已知 $\cos A = \frac{5}{13}, \sin B = \frac{3}{5}$, 则 $\cos C$ 的值为_____.

(2) 锐角 ΔABC 中, 若 $C = 2B$, 则 $\frac{c}{b}$ 的范围是()

A. (0,2) B. $(\sqrt{2}, 2)$

C. $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ D. $(1, \sqrt{3})$

(3) 设 $a, a+1, a+2$ 是钝角三角形的三边, 则实数 a 的取值范围为_____.

(4) 在 ΔABC 中, A, B, C 的对应边为 a, b, c , 若 $a = x, b = 2, B = 45^\circ$, 且此三角形有两解, 则 x 的取值范围为()

A. $(2, 2\sqrt{2})$

B. $2\sqrt{2}$

C. $(\sqrt{2}, +\infty)$

D. $(2, 2\sqrt{2}]$

(5) 在 ΔABC 中, $B = 120^\circ, AB = \sqrt{2}$, A 的角平分线 $AD = \sqrt{3}$, 则 $AC =$ _____.

【例二】已知角 A, B, C 为 ΔABC 的三个内角, 其对应边分别为 a, b, c . 若 $\vec{m} = (-\cos \frac{A}{2}, \sin \frac{A}{2})$,

$\vec{n} = (\cos \frac{A}{2}, \sin \frac{A}{2}), a = 2\sqrt{3}, \vec{m} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2}$, 求 $b+c$ 的取值范围.

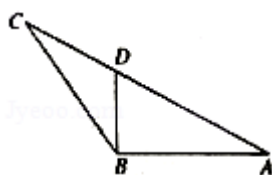
【例三】(1) (多选题) 如图 1, ΔABC 的三个内角 A, B, C 对应的三条边长分别是 a, b, c , $\angle ABC$ 为钝角, $BD \perp AB$, $\cos 2\angle ABC = -\frac{7}{25}, c = 2, b = \frac{8\sqrt{5}}{5}$, 则下列结论正确的有()

A. $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$

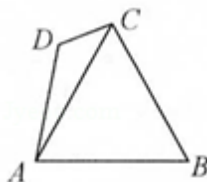
B. $BD = 2$

C. $5\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{DA}$

D. ΔCBD 的面积为 $\frac{4}{5}$



(例三图 1)



(例三图 2)

(2) (多选题) 如图 2, $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a=b$, 且 $\sqrt{3}(a+c)\cos C = c\cos A + a\cos C$, D 是 $\triangle ABC$ 外一点, $DC=1, DA=3$, 则下列说法正确的是()

- A. $\triangle ABC$ 是等边三角形
- B. 若 $AC=2\sqrt{3}$, 则 A, B, C, D 四点共圆
- C. 四边形 $ABCD$ 面积最大值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$
- D. 四边形 $ABCD$ 面积最小值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}-3$

【例三】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $a\sin A - 4b\sin C = 0$, A 为锐角, 则 $\frac{\sin B + \sin C}{2\sin A}$ 的取值范围为_____.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = \frac{4\sqrt{6}}{3}, \cos B = \frac{\sqrt{6}}{6}, AC$ 边上的中线 $BD = \sqrt{5}$, 求 $\sin A$ 的值.

(3) 已知在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $a=4, \frac{a\cos C + c\cos A}{\cos C} + \sqrt{2}b = 0$,

$$b\sin(A + \frac{3\pi}{2}) - a\cos(B + \pi) = \frac{b^2}{c}, \quad \text{则}$$

$C =$ _____, $\triangle ABC$ 的面积为_____.

【例四】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a\sin A - c\sin C = (a - b)\sin B$, $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 $\sqrt{2}$.

(1) 求 C ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 的最大值.

【例五】已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$, 且 $c = \sqrt{3}$, 则 $a - \frac{b}{2}$ 的取值范围为_____.

6.4.6 正、余弦定理应用举例

【学习目标】

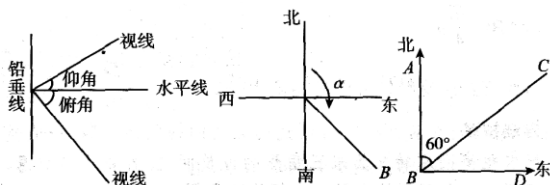
1. 了解某些术语, 会用正弦定理、余弦定理解决实际测量中关于距离、高度、角度等问题
2. 熟练正弦定理、余弦定理在航海中的应用, 学会用方程思想求解边长问题
3. 理解用余弦定理求边长时为什么会产生增根, 会结合题目中隐含的条件舍去增解

【重点】正弦定理、余弦定理在高度、航海中的应用

【难点】用余弦定理求边长时产生增解的取舍判断

【复习引入】

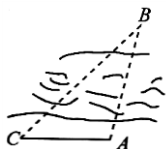
1. 常见测量术语: 仰角、俯角、方位角、方向角、基线.



2. 求 A、B 之间的距离

类别	两点间不可通或不可视	两点间可视但一点不可到达	两点都不可到达	点 B 即看不到也不能到达
图形				
方法	用余弦定理	用正弦定理	在 $\triangle ACD$ 中用正弦定理求 AC 在 $\triangle BCD$ 中用正弦定理求 BC 再在 $\triangle ABC$ 中用余弦定理求 AB	先用余弦定理求出 AC 或 AD, 再解直角三角形求出 AB

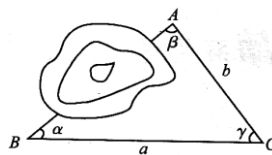
【例一】 (1) 如图, 设 A、B 两点在河的两岸, 一测量者在 A 的同侧, 在 A 所在的河岸边选定一点 C, 测出 AC 的距离为 50m, $\angle ACB=45^\circ$, $\angle CAB=105^\circ$ 后, 就可以计算出 A、B 两点的距离为 ()



- A. $50\sqrt{2}$ m B. $50\sqrt{3}$ m

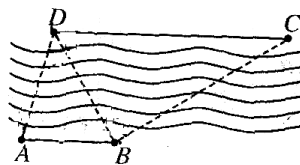
- C. $25\sqrt{2}$ m D. $\frac{25}{2}\sqrt{2}$ m

(2) 如图, 为了测量隧道口 AB 的长度, 给定下列四组数据, 其中较适宜的是 ()

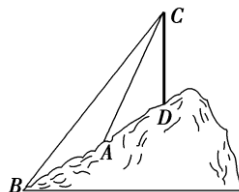


- A. α, a, b B. α, β, a
C. a, b, γ D. α, β, b

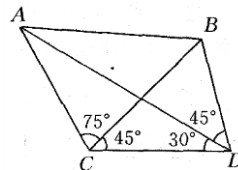
(3) 如图所示, 若小河两岸平行, 为知道河对岸边两棵树 C、D (CD 与河岸平行) 之间的距离, 选取岸边两点 A、B (AB 与河岸平行), 测得数据: $AB=6$ m, $\angle ABD=60^\circ$, $\angle DBC=90^\circ$, $\angle DAB=75^\circ$. 试求 C、D 间的距离.



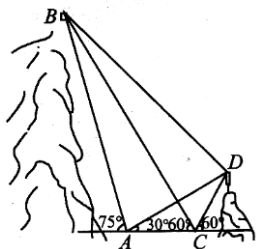
(4) 某地电信局信号转播塔建在一山坡上, 如图所示, 施工人员欲在山坡上 A、B 两点处测量与地面垂直的塔 CD 的高, 由 A、B 两地测得塔顶 C 的仰角分别为 60° 和 45° ; 又知 AB 的长为 40 m, 斜坡与水平面成 30° 角, 求该转播塔的高度.



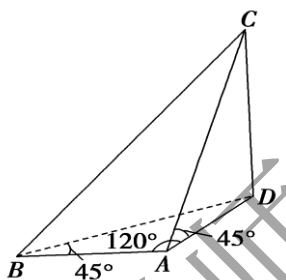
【例二】 如图, 隔河看两目标 A、B, 但不能到达, 在岸边选取相距 $\sqrt{3}$ 千米的 C、D 两点, 并测得 $\angle ACB=75^\circ$, $\angle BCD=45^\circ$, $\angle ADC=30^\circ$, $\angle ADB=45^\circ$ (A、B、C、D 在同一平面内), 求两目标 A、B 之间的距离.



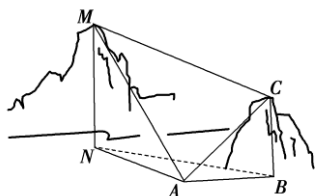
(2) (辽宁卷) 如图, A, B, C, D 都在同一个水平面垂直的平面内, B, D 为两岛上的两座灯塔的塔顶, 测量船于水面 A 处测得 B 点和 D 点的仰角分别为 75° 、 30° , 于水面 C 处测得 B 点和 D 点的仰角均为 60° , $AC=0.1$ km. 试探究图中 B, D 间距离与另外哪两点间距离相等, 然后求 B, D 的距离. (保留根号)



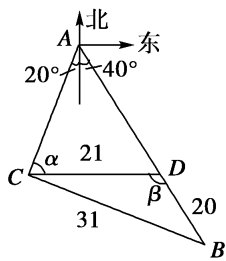
【例三】(1) 如图所示, A, B 是水平面上的两个点, 相距 800 m, 在 A 点测得山顶 C 的仰角为 45° ; $\angle BAD = 120^\circ$; 又在 B 点测得 $\angle ABD = 45^\circ$; 其中 D 点是点 C 到水平面的垂足, 求山高 CD .



(2) 如下左图, 为测量山高 MN , 选择 A 和另一座山的山顶 C 为测量观测点. 从 A 点测得 M 点的仰角 $\angle MAN = 60^\circ$; C 点的仰角 $\angle CAB = 45^\circ$ 以及 $\angle MAC = 75^\circ$; 从 C 点测得 $\angle MCA = 60^\circ$. 已知山高 $BC = 100$ m, 则山高 $MN =$ ____ m.



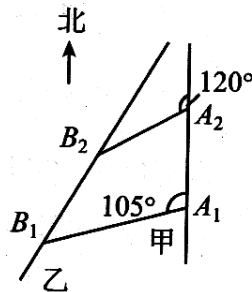
(例四 (2) 图)



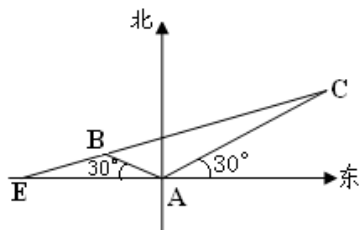
(例五图)

【例五】某观测站 C 在城 A 的南偏西 20° 的方向, 由城 A 出发的一条公路, 走向是南偏东 40° ; 在 C 处测得公路上 B 处有一人, 距 C 为 31 km, 正沿公路向 A 城走去, 走了 20 km 后到达 D 处, 此时 CD 间的距离为 21 km, 问: 这人还要走多少千米才能到达 A 城?

【例六】(山东卷) 如图所示, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 乙船按固定方向匀速直线航行. 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处, 此时两船相距 20 海里. 当甲船航行 20 分钟到达 A_2 处时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里, 问乙船每小时航行多少海里?



【例七】如图, 某海岛上一观察哨 A , 上午 11 时测得一轮船在海岛北偏东 60° 方向的 C 处, 12 时 20 分测得船在海岛北偏西 60° 方向的 B 处, 12 时 40 分轮船到达位于海岛正西方且距海岛 5 km 的 E 港口, 如果轮船始终匀速直线前进, 试求轮船的速度.



必修第2册 第七章、复数

7.1.1-2 数系的扩充和复数的概念、几何意义

【学习目标】

1、了解从实数到复数的扩充过程，知道数系扩充的优越性，掌握复数的相关概念

2、理解复数的几何意义，掌握复数的坐标表示，并能将向量的坐标表示与运算类比推理到复数的坐标表示与运算上来，并比较它们之间的异同

【重点】复数的概念与坐标表示

【难点】复数的几何意义

【新课引入】

★问题 1: $x^2 - 2 = 0$ 在有理数范围内有解吗?

★问题 2: $x^2 - 2 = 0$ 在实数范围内有解吗? 运算律是否仍然适用?

方程“ $x^2 + 1 = 0$ ”在实数集中无解，类比自然数到实数系的扩充过程，你能设想一种方法，使这个方程有解吗?

☆引导思考 1: 方程 $x^2 + 1 = 0$ 在实数集中无解，能否设想引入一个新数_____，使得方程成立，即_____

☆引导思考 2: 依照以上设想，把实数 a 与新引入的数 i 相加得到 $a+i$ ，把实数 b 与 i 相乘得到 bi ，把 a 与 bi 相加就得到 $a+bi$ ，等等. 这些运算律在引入新数 i 后仍然成立，则所有的结果都可以化为 $a+bi$ 的形式，从而可以定义一个新的数集_____.

定义：我们把集合 $C = \{a+bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ 中的数，即形如_____的数叫做复数，其中 i 叫做_____，全体复数组成的集合 C 叫做_____.

复数通常用字母 z 表示，即 $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$)，这一表示形式叫复数的_____，其中 a 叫做复数 z 的_____， b 叫做复数 z 的_____.

_____.

☆引导思考 3: 实数运算律仍适用，如果 $i^2 = -1$ ，则

$$(1) i^3 = \underline{\hspace{2cm}}, i^4 = \underline{\hspace{2cm}}, i^5 = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) (-i)^2 = \underline{\hspace{2cm}}, (2i)^2 = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$(2+i)^2 = \underline{\hspace{2cm}}, (2+i) \cdot (3-2i) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

★问题 3: $x^2 + 2 = 0$ 在复数范围内有解吗? _____

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 在复数范围内一定有解吗? _____

★问题 4: 复数 $a+bi = c+di$ ($a, b, c, d \in \mathbf{R}$) 的充要条件是什么?

答: _____

★问题 5: 复数集 C 和实数集 R 之间有什么关系?

复数与实数、虚数、纯虚数及 0 的关系: 对于复数 $a+bi (a, b \in \mathbf{R})$,

当且仅当 $b = 0$ 时，复数 $a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 是实数 a ;

当 $b \neq 0$ 时，复数 $z = a+bi$ 叫做虚数;

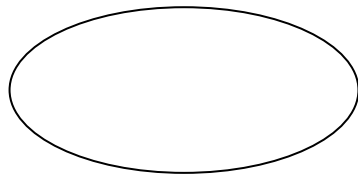
当 $a = 0$ 且 $b \neq 0$ 时， $z = bi$ 叫做纯虚数;

当且仅当 $a = b = 0$ 时， z 就是实数 0.

如: $3+2i$, $\frac{1}{2}-\sqrt{3}i$, $-\sqrt{3}-\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{5}i$ 等都是虚数，

其中 $-\frac{1}{5}i$ 是纯虚数.

★问题 6: 你能否用 Venn 图表示复数集、实数集、虚数集、纯虚数集之间的关系?



【例一】已知复数 $z = (m^2 - 2m) + \frac{m^2 - 2m - 8}{m}i$ ，其中 $m \in \mathbf{R}$. 试求当 m 为何值时，

(1) z 是实数? (2) z 是虚数? (3) z 是纯虚数?

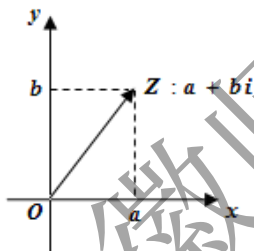
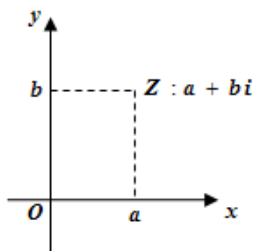
【例二】如果 $(x+y)+(y-1)i=(2x+3y)+(2y+1)i$ ，求实数 x, y 的值。

★问题 7：我们知道，实数与数轴上的点一一对应，即实数可用数轴上的点来表示，类比实数的几何意义，复数的几何意义是什么呢？

☆引导思考 1：根据复数相等的定义，任何一个复数 $z=a+bi$ 都可以由一个有序实数对 (a, b) 唯一确定，而有序实数对 (a, b) 与_____

是一一对应的，所以复数集与_____中的点集可以建立一一对应的关系。

☆引导思考 1：如下图，点 Z 的横坐标是 a ，纵坐标是 b ，复数 $z=a+bi$ 可用点 $Z(a, b)$ 表示.这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫做_____， x 轴叫做_____， y 轴叫做_____。



【思考 1】：说说复平面上哪些点表示实数？哪些点表示虚数？哪些点表示纯虚数？

【思考 2】：复平面内的点 $(-2, 0)$ 表示_____， $(-2, 3)$ 表示_____， $(0, -1)$ 表示_____。

复数 $z=a+bi$ $\longleftrightarrow$ 复平面内的点 $Z(a, b)$

这是复数的一种几何意义。

【思考 3】：还有什么也可以用坐标系中一个个有序数对来表示的？

复数 $z=a+bi$ $\longleftrightarrow$ 平面向量 $\overrightarrow{OZ}$

这是复数的另一种几何意义。

★问题 8：类比向量模的定义和向量的坐标运算，自行写出复数的模的定义和复数的加减运算。

向量

向量的模：

$$|\overrightarrow{OZ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

向量加法：

$$(a, b) + (c, d) =$$

向量减法：

$$(a, b) - (c, d) =$$

向量的加法交换律、结合律：

$$\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} =$$

$$(\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2}) + \overrightarrow{OZ_3} =$$

复数

复数的模：

$$|z| = |a + bi| =$$

复数的加法运算：

$$(a + bi) + (c + di) =$$

复数的减法运算：

$$(a + bi) - (c + di) =$$

复数的加法交换律、结合律： $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$

$$z_1 + z_2 =$$

$$(z_1 + z_2) + z_3 =$$

【例三】计算 $(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$ 。

【例四】实数 m 取什么值时，复平面内表示复数 $z=(m^2-8m+15)+(m^2-5m-14)i$ 的点

- (1) 位于第四象限；
- (2) 位于第一、三象限；
- (3) 位于直线 $y=x$ 上。

【例五】(1) 给出下列命题：①若 $x+yi=0$ ，则 $x=y=0$ ；②若 $a+bi=3+8i$ ，则 $a=3, b=8$ ；③若 x 为实数，且 $(x^2-4)+(x^2+2x)i$ 是纯虚数，则 $x=\pm 2$ ；④若 $x, m \in \mathbb{R}$ 且 $3x+mi < 0$ ，则有 $x < 0$ 。其中正确命题的序号是_____。

(2) 已知关于 x 的方程 $x^2+(m+2i)x+2+2i=0 (m \in \mathbb{R})$ 有实数根 n ，且 $z=m+ni$ ，则复数 z 等于_____。

(3) 若不等式 $m^2-(m^2-3m)i < (m^2-4m+3)i+10$ 成立，求实数 m 的值。

7.1.3 复数代数形式的乘除运算

【学习目标】

1、类比得到复数代数形式的乘法运算和运算律，知道共轭复数的概念，并能利用共轭复数的特点进行复数的除法运算

2、理解复数的乘除运算得到的结果仍是一个确定的复数，会用待定系数法求解复数问题

【重点】复数代数形式的乘除运算

【难点】复数代数形式的除法运算

【类比引入】

由下面的计算类比得到复数代数形式的加减运算和乘法运算：

$(2+\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=?$ $(2+\sqrt{2})-(3+2\sqrt{2})=?$ $(2+\sqrt{2})\cdot(3+2\sqrt{2})=?$	
$(a+bi)+(c+di)=$ _____ $(a+bi)-(c+di)=$ _____ $(a+bi)\cdot(c+di)=$ _____	

可以看出，两个复数相乘的结果是一个确定的_____数。

【思考 1】：两个向量的数量积是一个实数，与这里的结果是不一样的，因此复数的乘法运算不能用向量类比。

★问题 1：复数的乘法是否满足交换律、结合律？乘法对加法满足分配率吗？

对于任意 $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$ ，有：

交换律： $z_1 \cdot z_2 =$ _____

结合律： $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 =$ _____

分配率： $z_1 \cdot (z_2 + z_3) =$ _____

【例一】计算：

(1) $(1+i)^2$ ； (2) $i(2-i)(1-2i)$ ；

(3) $(1+i)(1-i)$ ；

(4) $(3+4i)(3-4i)$ 。

注释：常用结论

$$\textcircled{1} (a \pm bi)^2 = a^2 \pm 2abi - b^2 (a, b \in \mathbf{R});$$

$$\textcircled{2} (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 (a, b \in \mathbf{R});$$

$$\textcircled{3} (1 \pm i)^2 = \pm 2i.$$

★问题 2：若 $a, b \in \mathbf{R}$ ，则 $(a+bi)(a-bi) =$ _____

一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫做互为_____，记作 z 与 $\bar{z}$ 。

若复数 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ ，则 $\bar{z} =$ _____。

(1)其中，虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫共轭虚数。

(2)若 z_2 是 z_1 共轭复数，则 z_1 也是 z_2 共轭复数；

(3)在复平面内， z 与 $\bar{z}$ 所对应的点关于_____对称；

(4)若复数 $z = a+bi$ ，则 $z \cdot \bar{z} =$ _____。

【思考 2】：实数 a 有共轭复数吗？

★问题 3：联想 $\frac{2+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = ?$ 的求解方法，你能猜想复数的除法法则吗？（ $c+di \neq 0$ ）

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$$

由此可见，两个复数相除的结果也是一个确定的_____数。

根式除法		复数除法
$\frac{2+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = ?$ 分子分母同乘以 _____		$\frac{a+bi}{c+di} = ?$ 分子分母同乘以 _____

(分母“有理化”)

(分母“_____”)

【例二】计算:

(1) $\frac{1+2i}{3-4i}$;

(2) $\frac{1}{(2-i)^2}$.

【例三】计算:

(1) $(1-2i)(3+4i)(-2+i)$;

(2) $\frac{5(4+i)^2}{i(2+i)}$.

【例四】已知 $z^2 = 3+4i$, 求 z .【例五】把复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$, 已知

$(1+2i)\bar{z} = 4+3i$, 求 z 及 $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|$.

【例六】利用公式 $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$, 把下列各式分解成一次因式的积:

(1) $x^2 + 4$;

(2) $a^4 - b^4$.

【例七】(1) A, B 分别是复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点, O 是原点, 若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 则三角形 AOB 一定是()

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形
C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形

(2) 如果复数 z 满足 $|z+i|+|z-i|=2$, 那么 $|z+i+1|$ 的最小值是()

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

(3) 若复数 z 满足 $|z+\sqrt{3}+i|\leq 1$, 求 $|z|$ 的最大值和最小值.(4) 已知复数 z 满足条件 $z^2 - |z| - 6 = 0$, 求复数 z .

必修第2册 第八章、立体几何初步

8.1.1 基本立体图形的结构特征

学习目标

1. 认识棱柱、棱锥和棱台及其简单组合体的结构特征
2. 了解棱柱、棱锥和棱台的有关概念
3. 掌握多面体与旋转体的区别与结构特征

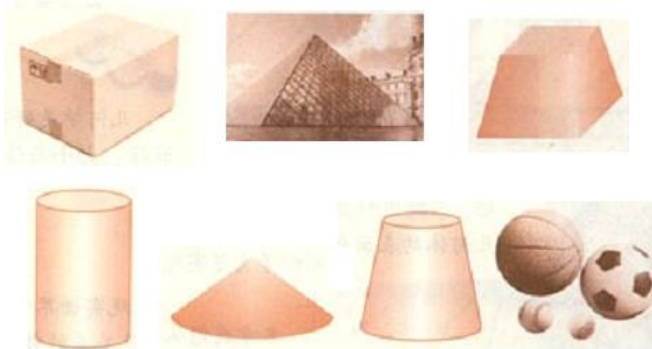
课前提助餐

写出下面简单几何体的定义：

1. 我们把由若干个_____所围成的几何体叫做多面体；把一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转所形成的封闭几何体，叫做_____。这条定直线叫做旋转体的_____。
2. 棱柱：有两个面_____，其余各面都是_____，并且每相邻两个四边形的公共边都互相_____，由这些面所围成的几何体叫做棱柱。
3. 棱锥：有一个面是_____，其余各面都是有一个公共顶点的_____，由这些面围成的几何体叫做棱锥。
4. 圆柱：以_____的一边所在直线为旋转轴，其余三边旋转形成的_____所围成的旋转体叫做圆柱。
5. 圆锥：以_____的一条_____边所在直线为旋转轴，其余两边旋转所形成的曲面所围成的旋转体叫做圆锥。
6. 棱台：用一个_____于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面间的部分叫做棱台。
7. 圆台：用一个_____于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面间的部分叫做圆台。
8. 球：以半圆的_____所在直线为轴，旋转一周，所形成的旋转体叫做_____，简称球。_____叫球心，_____叫做球的半径，_____叫做球的直径。球常用表示球心的字母来表示。

重难点突破

★问题1：观察下面空间几何体，构成这些空间几何体的面有什么特点？

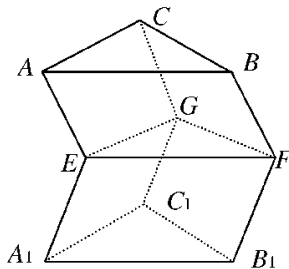


【思考】：如何定义多面体与旋转体呢？

★问题2：能不能把棱柱理解成“有两个面是互相平行且全等的多边形，其余各面都是平行四边形的多面体。”？

答：_____

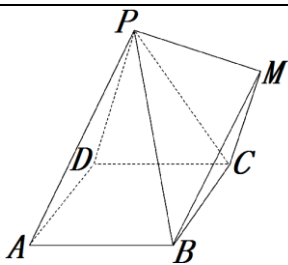
如图所示，底面 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是平行且全等的多边形，其余各面都是平行四边形，显然这个多面体不是棱柱，所以定义中强调“其余各面都是四边形，且每相邻两个四边形的公共边都互相平行”。



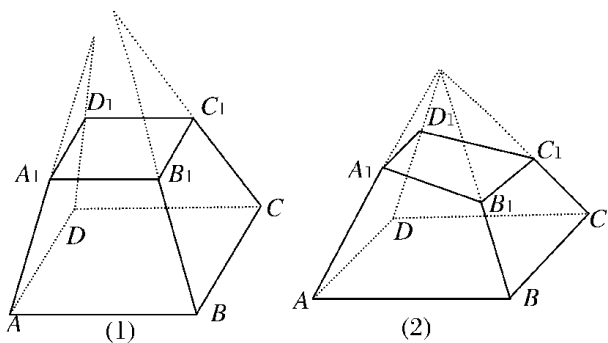
★问题3：在棱锥的定义中，“有公共顶点”这个条件能否去掉？为什么？

答：_____

如图是由三棱锥 $M-PBC$ 和四棱锥 $P-ABCD$ 拼合而成的几何体。显然它符合“有一个面是多边形，其余各面都是三角形的要求”，但它不是棱锥。



★问题 4: 下面两个图形中的几何体是不是棱台, 为什么?

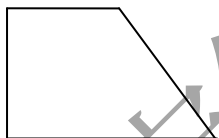


★问题 5: 圆柱、圆锥、圆台有哪些异同点?

答: 相同点: _____

不同点: _____

★问题 6: 将直角梯形沿它的一条边所在的直线为轴旋转一周, 所形成的几何体一定是圆台吗?



答: 圆台可看作直角梯形以_____所在直线为旋转轴, 其余三边旋转所形成的曲面所围成的旋转体.

★问题 7: 你能否从集合的角度给出球面的定义?

答: 球面也可以看作空间中_____的点的集合.

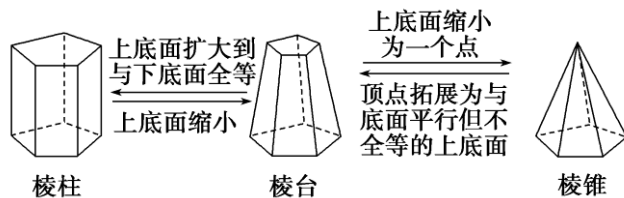
注: ①球面与球体不是同一概念, 我们平时所说的球一般指球体, 如强调球面应特别说明.

②球面被经过球心的平面截得的圆叫做球的大圆; 被不经过球心的平面截得的圆叫做球的小圆.

③球小圆的圆心 O' , 球心 O , $|OO'| = d$, 球小圆半

径 r , 球半径为 R , 则 $d^2 = R^2 - r^2$.

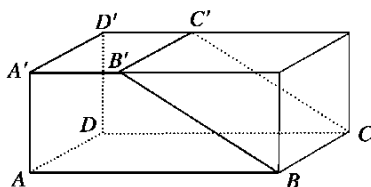
问题 8: 既然棱柱、棱锥、棱台都是多面体, 那么它们在结构上有哪些相同点与不同点? 三者的关系如何? 当底面发生变化时, 它们能否相互转化?



典例解析

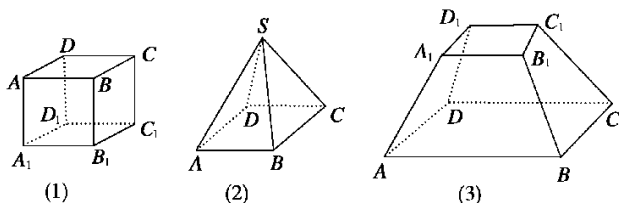
【例一】直角三角形绕其一边旋转一周所形成的几何体是否一定是圆锥?

【例二】如图, 过 BC 的截面截去长方体的一角, 截后剩余几何体中, $A'B' = D'C'$, 问剩余的几何体是不是棱柱?



【例三】用一个平面截半径为 R 的球, 截面到球心的距离为 $\frac{R}{2}$, 则截面圆面积为_____.

【例四】指出所给三个几何图形的底面、侧面、顶点、棱, 并指出它们分别由几个面围成, 各有多少条棱? 多少个顶点? 你能发现它们之间有什么规律吗?



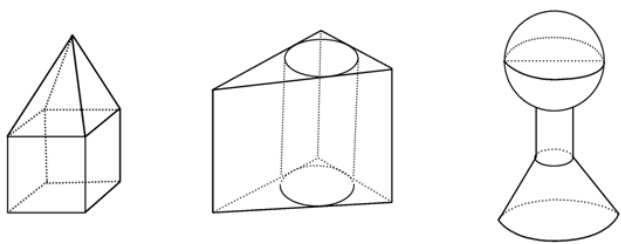
8.1.2 简单组合体的结构特征

学习目标

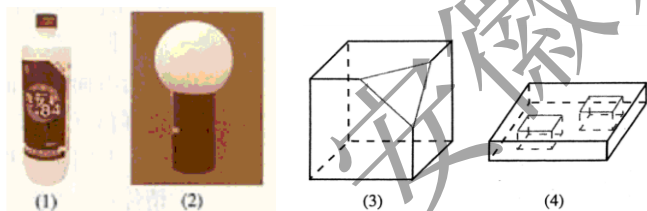
1. 了解简单组合体的概念, 认识简单组合体的结构特征
2. 能识别组合体分解与合成后的图形, 能描绘多面体被一平面所截得到的平面图形

课前自助餐

1. 说出下图是由什么几何体组合而成

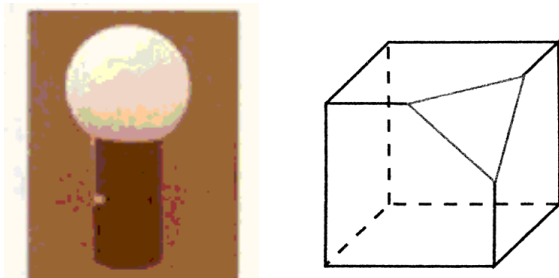


2. 简单组合体的构成有两种基本形式: 一种是由简单几何体_____而成, 如下图 (1) (2) 所示; 另一种是由简单几何体_____一部分而成, 如下图 (3) (4) 所示.



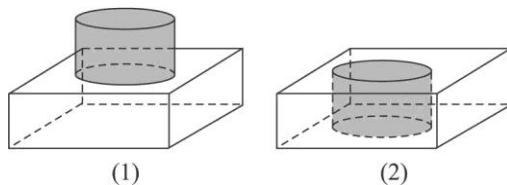
重难点突破

★问题 1: 如何识别构成简单组合体的几何图形?

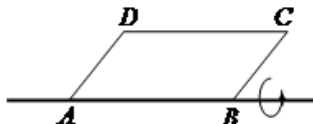


★问题 2: 如下两个图形所示的两个组合体有什么区

别?



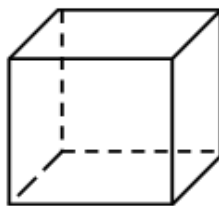
★问题 3: 如图, 将平行四边形 $ABCD$ 绕 AB 边所在的直线旋转一周, 由此形成的几何体是由哪些简单几何体构成的?



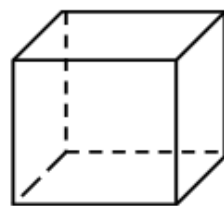
★问题 4: 连接正方体相邻各面的中心 (所谓中心是各面正方形两条对角线的交点), 所得一个几何体是几面体? 并画图表示该几何体.

【小练习 1】连接正方体相邻各面的中心得到空间几何体关于其结构特征, 下列说法正确的有_____

- ①该几何体是由两个同底的四棱锥组成的几何体;
- ②该几何体有 12 条棱、6 个顶点;
- ③该几何体有 8 个面, 并且各面均为三角形;
- ④该几何体有 9 个面, 其中一个面是四边形, 其余均为三角形.



(问题 4 图)



(问题 5 图)

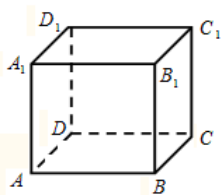
★问题 5: 用一个平面去截正方体, 得到的截面可能会是什么图形? 请作图说明.

答:

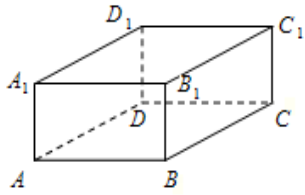
【小练习 2】(多选) 一个正方体的截面可能是()

- A. 等边三角形
- B. 正方形
- C. 正八边形
- D. 平行四边形

★问题 6: 如下图是棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 有一只蚂蚁从点 A 沿表面爬到点 C_1 , 问最短路线长为多少?



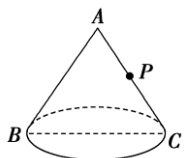
(问题 6 图)



(问题 7 图)

★问题 7: 如果将问题 6 中的正方体改为长方体, 且 $AA_1=1$, $AB=2$, $AD=3$, 此时蚂蚁的爬行最短路线为多少?

【小练习 3】如图所示, 有一圆锥形粮堆, 母线与底面圆的直径构成边长为 6 m 的正三角形 ABC , 粮堆母线 AC 的中点 P 处有一只老鼠正在偷吃粮食, 此时, 小猫正在 B 处, 它要沿圆锥侧面到达 P 处捕捉老鼠, 求小猫所经过的最短路程.(结果不取近似值)



典例解析

【例一】(1) 指出下面四个图中的几何体是由哪些简单的几何体构成的.

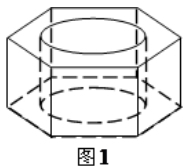


图1



图2

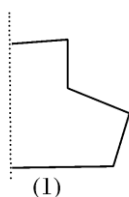


(1)

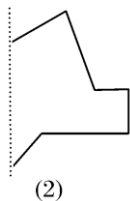


(2)

【例二】下图绕虚线旋转一周后形成的立体图形是由哪些简单几何体构成的.

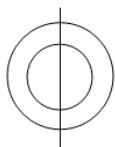


(1)

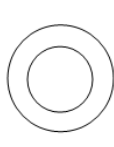


(2)

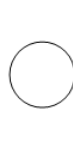
【例三】充满气的车轮内胎可由下面某个图形绕对称轴旋转而成, 这个图形是 ()



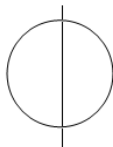
A



B

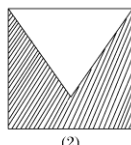
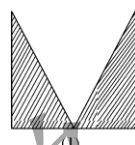
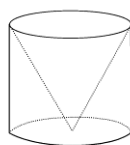


C



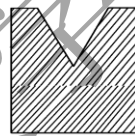
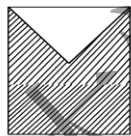
D

【例四】图中最左边的几何体由一个圆柱挖去一个以圆柱的上底面为底面, 下底面圆心为顶点的圆锥而得. 现用一个竖直的平面去截这个几何体, 则截面图形可能是 ()



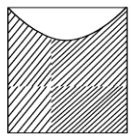
(1)

(2)



(3)

(4)



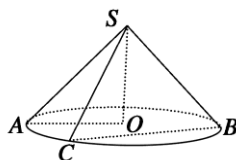
(5)

A. (1)(2) B. (1)(3) C. (1)(4) D. (1)(5)

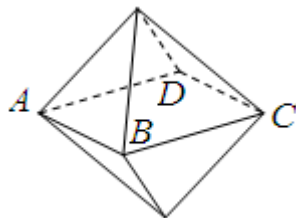
【例五】(1) 一个圆锥截成圆台, 已知圆台的上下底面半径的比是 $1:4$, 截去小圆锥的母线长为 3 cm, 则圆台的母线长为_____cm.

(2) 已知球的外切圆台上、下底面半径分别为 r, R , 则圆台的高为_____, 球的半径为_____.

(3) 如图所示, 圆锥底面圆的半径 $OA=6$, 轴截面的顶角 $\angle ASB$ 是直角, 过两条母线的截面 SCB 截去底面圆周的 $\frac{1}{6}$, 求截面的面积.



(例五题 3 图)



(例六题图)

【例六】(江苏卷) 底面为正方形, 各侧面均为全等腰三角形的两个相同的四棱锥组成如图所示的几何体, 可放入棱长为 1 的正方体内, 使四棱锥的底面 $ABCD$ 与正方体的某一个面平行, 且各顶点均在正方体的面上, 则这样的几何体体积的可能有 ()

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 无穷多个

8.2 立体图形的直观图

学习目标

1. 了解画空间几何体的直观图时各个面会有不同的表示
2. 掌握斜二侧画法步骤，会用斜二侧法画出简单空间图形（长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合）的直观图

课前自助餐

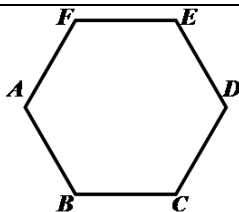
1. 用来表示空间图形的平面图形叫做空间图形的_____.
2. 斜二测画法的步骤：
 - (1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于点 O . 画直观图时，把它们画成对应的 x' 轴和 y' 轴，两轴交于点 O' ，且使 $\angle x'O'y' = \underline{\hspace{2cm}}$ ，它们确定的平面表示水平平面.
 - (2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于_____或_____的线段.
 - (3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度_____，平行于 y 轴的线段，长度为_____.
 - (4) 画图完成后，擦去作为辅助线的坐标轴就得到了空间图形的直观图.

重难点突破

- ★问题 1：如果把一个正方形水平放置放在跟前，观察它的直观图，问还是一个正方形吗？如果把其他的平面图形水平放置，其直观图该怎么画呢？
- ★问题 2：在画正方体时，哪些面的直观图需要变形？为什么？

下面我们介绍一种常用的画水平放置的平面图形直观图的方法——斜二侧画法.

用斜二侧画法画水平放置的正六边形的直观图.



解：

步骤一：

步骤二：

步骤三：

【点评】：画平面图形水平直观图的一般步骤：

(1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于 O 点. 画直观图时，把它画成对应的 x' 轴、 y' 轴，两轴交于 O' ，使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ （或 135° ），它们确定的平面表示水平平面.

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

☆注：“直观图”最常用的画法是斜二测画法，由其规则能画出水平放置的直观图，其实质就是在坐标系中确定点的位置的画法. 基本步骤如下：

(1) 建系：在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，得到直角坐标系 xoy ，直观图中画成斜坐标系 $x'o'y'$ ，两轴夹角为 45° .

(2) 平行不变：已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 或 y' 轴的线段.

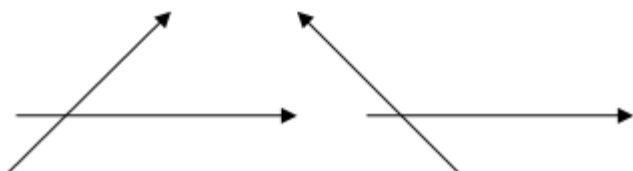
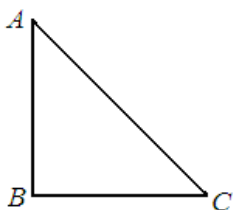
(3) 长度规则：已知图形中平行于 x 轴的线段，

在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半。

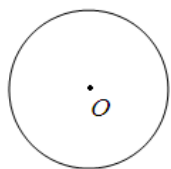
总结起来也就是：“_____”。

典例解析

【例一】画出如右直角三角形 ABC 在下面两种坐标系表示的水平面上的直观图。

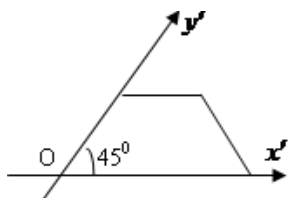
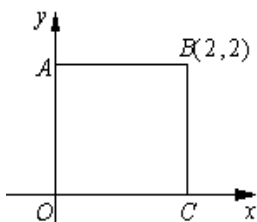


【例二】(1) 画出下圆的水平直观图。



(2) 画出棱长为 2cm 的正方体的直观图。

【例三】(1) 如图为水平放置的正方形 $ABCO$ ，它在直角坐标系 xOy 中点 B 的坐标为 $(2, 2)$ ，则在用斜二测画法画出的正方形的直观图中，顶点 B' 到 x' 轴的距离为_____。



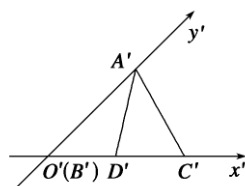
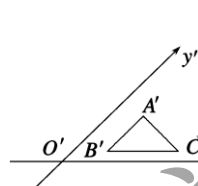
(例三 (1) 图)

(例三 (2) 图)

(2) 一梯形的直观图是一个如图所示的等腰梯形，且梯形 $OA'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{2}$ ，则原梯形的面积为()

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 4

(3) 如图所示， $\triangle A'B'C'$ 是水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图， $A'B' \parallel y'$ 轴， $B'C' \parallel x'$ 轴，且 $A'B' = 2$ ， $B'C' = 3$ ，则 $\triangle ABC$ 中， $AC =$ _____。



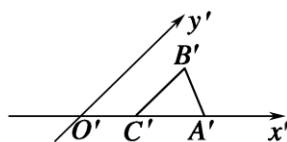
(例三 (3) 图)

(例三 (4) 图)

(4) 如图所示， $\triangle A'B'C'$ 是水平放置的 $\triangle ABC$ 用斜二测画法得到的直观图，则在 $\triangle ABC$ 的三边及中线 AD 中，最长的线段是_____。

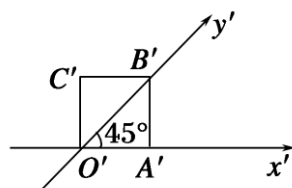
【例四】(多选)水平放置的 $\triangle ABC$ 的斜二测直观图如图所示，已知 $B'C' = 4$ ， $A'C' = 3$ ， $B'C' \parallel y'$ 轴，则 $\triangle ABC$ 中以下说法正确的是()

- A. $\triangle ABC$ 是直角三角形
B. AC 长为 6
C. BC 长为 8



- D. AB 边上的中线长为 $\frac{\sqrt{73}}{2}$

【例五】如图，正方形 $O'A'B'C'$ 的边长为 1 cm，它是水平放置的一个平面图形的直观图，请画出原来的平面图形的形状，并求原图形的周长与面积。



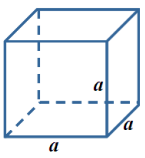
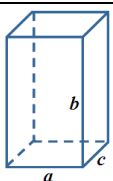
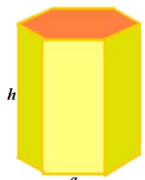
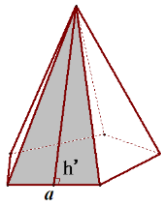
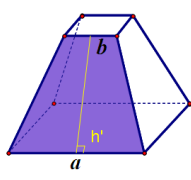
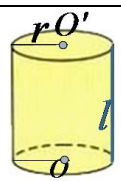
8.3.1 柱、锥、台体的表面积

学习目标

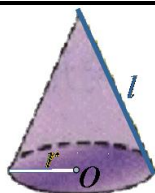
1. 会画柱、锥、台体的平面展开图，并会利用平面展开图计算它们的面积及最短距离问题
2. 掌握圆柱、圆锥、圆台三者侧面积之间的联系

课前自助餐

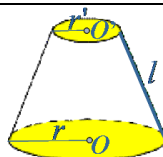
初中时我们学过简单几何体的表面积，请在下列几何体的旁边画出它们的展开图，并写出下列几何体的表面积公式：

名称	简单几何体	展开图	表面积公式
正方体			
长方体			
正六棱柱			
正五棱锥			
正三棱台			
圆柱			

圆锥



圆台



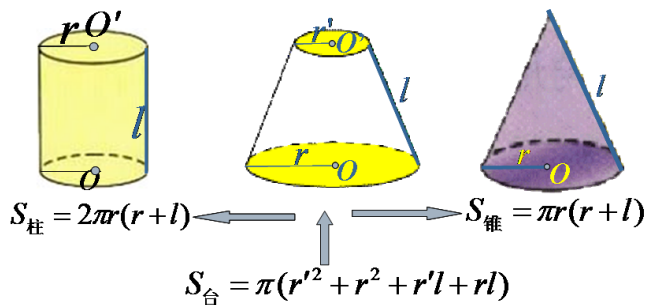
重难点突破

★问题 1：正棱柱、正棱锥的侧面积与地面正多边形的周长之间有什么关系？

★问题 2：圆锥侧面展开扇形的圆心角 θ 怎么算？

圆台的侧面展开扇环所对的圆心角跟上下底半径和母线之间有什么关系？

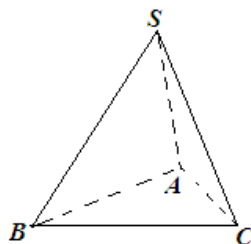
★问题 3：圆柱、圆锥、圆台三者的表面积公式之间有什么关系？这种关系是巧合还是存在必然联系？



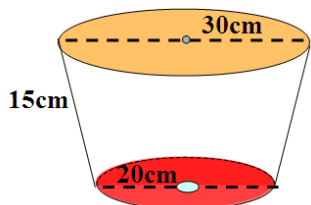
$$S_{\text{柱}} = 2\pi r(r+l) \quad \leftarrow \quad S_{\text{台}} = \pi(r'^2 + r^2 + r'l + rl) \quad \rightarrow \quad S_{\text{锥}} = \pi r(r+l)$$

典例解析

【例一】已知棱长为 a ，各面均为等边三角形的四面体 $S-ABC$ （如图），求它的表面积。



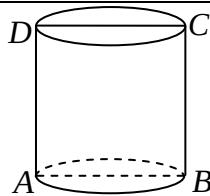
【例二】如图，一个圆台形花盆盆口直径 30 cm，盆底直径为 20cm，底部渗水圆孔直径为 2 cm，盆壁长 15cm. 那么花盆的表面积是多少平方厘米（结果保留 π ）？



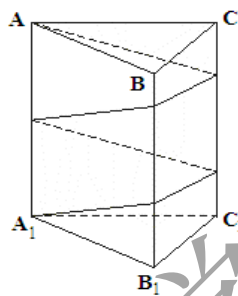
【例三】圆锥的母线长为 l ，高为 $\frac{1}{2}l$ ，则过圆锥顶点的最大截面面积为（ ）

- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}l^2$ B. $\frac{1}{2}l^2$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}l^2$ D. $\frac{1}{4}l^2$

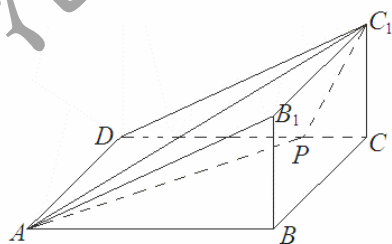
【例四】(1)如图，已知圆柱体底面圆的半径为 $\frac{2}{\pi}$ ，高为 2， AB ， CD 分别是两底面的直径， AD ， BC 是母线. 若一只小虫从 A 点出发，从侧面爬行到 C 点，则小虫爬行的最短路线的长度是_____（结果保留根号）.



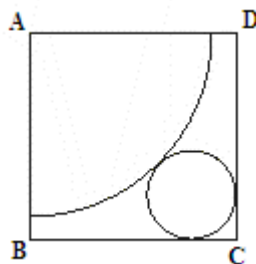
(2)如下图，已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长均为 1，高为 8，一质点自 A 点出发，沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线的长为_____.



【例五】如图，直三棱柱 ABB_1-DCC_1 中， $\angle ABB_1 = 90^\circ$ ， $AB = 4$ ， $BC = 2$ ， $CC_1 = 1$ ， DC 上有一动点 P ，则 $\triangle APC_1$ 周长的最小值是_____.



【例六】如图，在边长为 $10+2\sqrt{2}$ 的正方形中，剪下一个扇形和一个圆，以此分别作圆锥的侧面和底面，求它们所围成的圆锥的表面积.



8.3.2 柱、锥、台体的体积

学习目标

1. 了解祖暅原理的具体内容，会用祖暅原理推导棱锥、圆锥的体积公式
2. 经历棱台公式的推导过程，会利用柱、锥、台体体积公式求解简单几何体的体积，并掌握其公式之间的相互联系

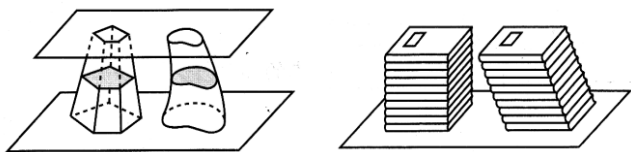
课前自助餐

1. 棱长为 a 的正方体的体积为_____，长、宽、高分别为 a 、 b 、 c 的长方体的体积为_____.
2. 底面积为 S ，高为 h 的柱体体积 $V=_____$ ，底面半径为 r ，高为 h 的圆柱的体积 $V=_____$.
3. 底面积为 S ，高为 h 的锥体体积 $V=_____$ ，底面半径为 r ，高为 h 的圆锥体积 $V=_____$.
4. 上、下底面积分别为 S' 、 S ，高为 h 的台体体积为_____. 上、下底面半径为 r 、 R ，高为 h 的圆台体积 $V=_____$.

重难点突破

★问题 1：初中时候我们学过圆柱的体积公式为 $V_{\text{圆柱}}=_____$ ；圆锥的体积公式为 $V_{\text{圆锥}}=_____$. 为什么圆锥的体积是跟他同底等高的圆柱体的体积的 $\frac{1}{3}$ 呢？你知道它是如何推导得到的吗？

祖暅原理：夹在两个平行平面之间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.

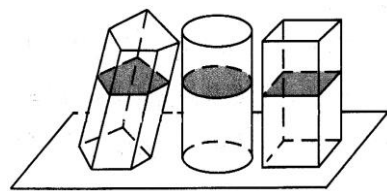


定理：柱体（棱柱、圆柱）的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积.

即

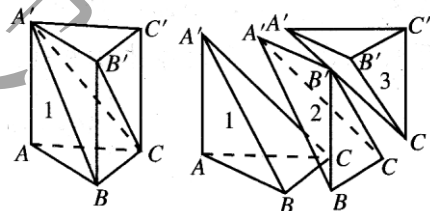


☆注：

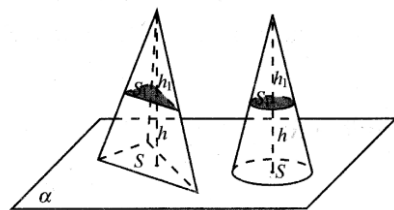


1. 底面半径是 r ，高是 h 的圆柱的体积是_____；
2. 长、宽、高为 a 、 b 、 c 的长方体的体积为_____；
3. 棱长为 a 的正方体的体积为_____.

★问题 2：如果三棱锥的底面积为 S ，高为 h ，它的体积是多少？如何推导？



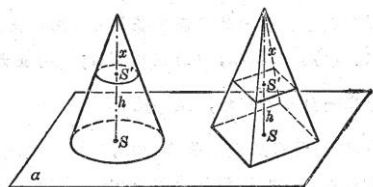
★问题 3：等底面积、等高的两个锥体的体积相等吗？为什么？



定理：如果一个锥体（棱锥、圆锥）的底面积为 S ，高为 h ，那么它的体积是



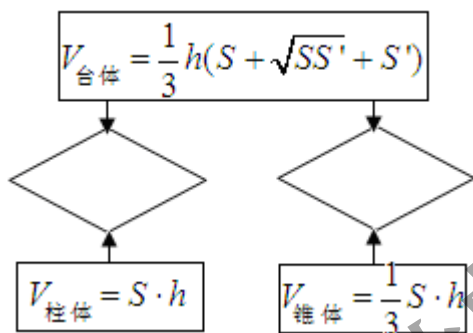
★问题 4：设任意台体（棱台或圆台）的上、下底面的面积分别是 S' 、 S ，高是 h ，它的体积为多少？如何推导？



定理： 如果台体（棱台或圆台）的上、下底面的面积分别是 S' 、 S ，高是 h ，那么它的体积是

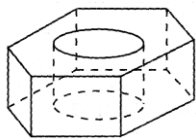


★问题 5： 观察柱、锥、台体的三个求体积的公式，说说他们之间有什么联系？

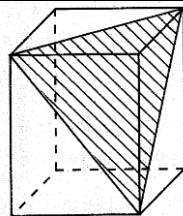


典例解析

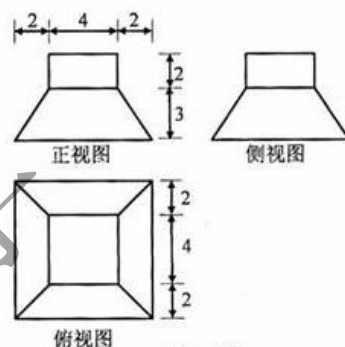
【例一】 有一个铁质的六角螺帽，已知底面是正六边形，边长为 12cm，内孔直径为 10cm，高为 10cm，求这个螺帽的体积。



【例二】 如图，将一个长方体沿相邻三个面的对角线截出一个棱锥，求棱锥的体积与剩下的几何体体积的比。



【例三】 若某几何体的三视图（单位：cm）如图所示，则此几何体的体积是_____ cm^3 。



【例四】 已知棱台的体积是 76cm^3 ，高是 6cm ，一个底面面积是 18cm^2 ，求这个棱台的另一个底面面积。

【例五】 斜三棱柱的一个侧面的面积为 S ，另一条侧棱到这个侧面的距离是 a ，则这个三棱柱的体积是 ()

- A. $\frac{1}{3}Sa$ B. $\frac{1}{4}Sa$ C. $\frac{1}{2}Sa$ D. $\frac{2}{3}Sa$

8.3.3 球的体积与表面积

学习目标

1. 掌握球的概念, 了解球无法像柱、锥、台体那样展开成平面图形, 因此需要寻找好的方法求其表面积
2. 掌握球体的体积公式和球面面积公式, 体会公式推导中所运用的数学思想, 并会用公式解决有关球体的体积和球面的面积的计算问题

课前自助餐

1. 常见几何体的体积公式:

柱体的体积公式: $V_{\text{柱体}} =$

锥体的体积公式: $V_{\text{锥体}} =$

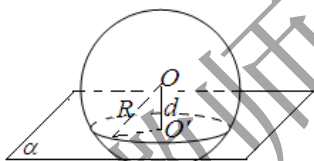
台体的体积公式: $V_{\text{台体}} =$

2. 球的相关概念与简单性质:

(1) 球心和截面圆心的连线_____截面;

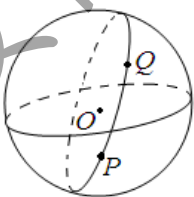
(2) 球心到截面的距离 d

与球的半径 R 及截面的半径 r , 满足下面的关系:



注: 1. 当截面过球心时, 这时球面被截得的圆最大, 这个圆叫 球的大圆.

2. 在球面上, 两点之间的最短距离, 就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度, 我们把这个弧长叫做 两点间的球面距离.



3. 半径为 R 的球的表面积为_____, 体积为_____.

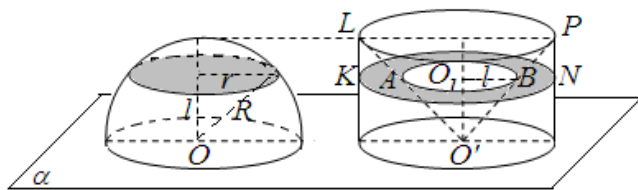
4. 球的半径增大为原来的 2 倍, 则球表面积是原来的_____倍, 球体积是原来的_____倍.

重难点突破

★问题 1: 如果一个球的半径为 R , 如何推导出它的

体积和表面积公式?

【引导思考】请根据下图的提示, 利用祖暅原理求出半球体的体积.



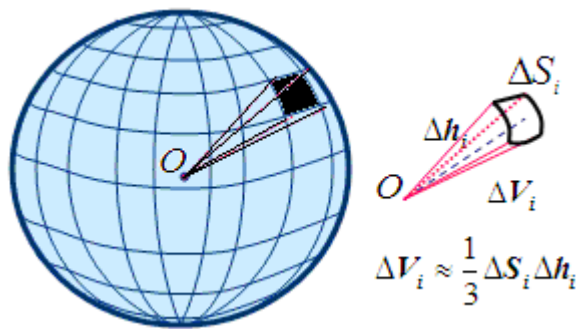
推导过程: 如图, 我们取一个底面半径和高都等于 R 的圆柱, 从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面, 下底面圆心为顶点的圆锥, 把所得的几何体和半球放在同一个平面 α 上, 则有

定理: 如果球的半径是 R , 那么它的体积是

$$V_{\text{球}} =$$

★问题 2: 根据球体的特点, 能否利用球体的体积公式推导球体的表面积公式, 它们之间有什么联系?

【引导思考】请根据下图的提示, 自己推导出球体的表面积公式.



推导过程: 如图, 球面被分割成 n 个网格, 表面积分别为: $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$. 则球的表面积为:

$$S =$$

定理： 球面面积等于它的大圆面积的____倍.

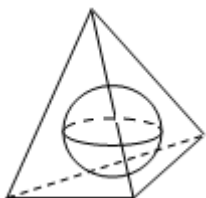
即

★问题 3：你认为在球的体积公式与表面积公式的推导过程中，都用到了那些数学思想与方法？

答：_____.

★问题 4：仿照球的表面积公式的推导，试解决下面这个问题：

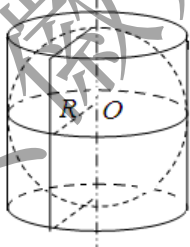
一个棱锥，它的表面积为 S ，体积为 V ，它有一个内切球，则它的内切球的半径 $r =$ _____.



典例解析

【例一】如图，圆柱的底面直径与高都等于球的直径. 求证：

- (1) 球的体积等于圆柱体积的 $\frac{2}{3}$ ；
- (2) 球的表面积等于圆柱的侧面积.



【例二】将半径为 1 和 2 的两个铅球，熔成一个大铅球，那么这个大铅球的表面积是_____.

【例三】表面积为 S 的多面体内有一个表面积为 36π 的内切球，则该多面体的体积为 ()

- A. $9S$ B. $3S$ C. S D. $\frac{S}{3}$

【例四】(1) 一个球的内接正方体的表面积是 54，求该球的表面积和体积.

(2) 设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 a ，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为()

- A. πa^2 B. $\frac{7}{3}\pi a^2$
C. $\frac{11}{3}\pi a^2$ D. $5\pi a^2$

(3) 已知各顶点都在一个球面上的正四棱锥的高为 3，体积为 6，则这个球的表面积为()

- A. 16π B. 20π
C. 24π D. 32π

(4) 已知 S, A, B, C 是球 O 表面上的点， $SA \perp$ 平面 ABC ， $AB \perp BC$ ， $SA=AB=1$ ， $BC=\sqrt{2}$ ，则球 O 的表面积等于()

- A. 4π B. 3π
C. 2π D. π

【例四】把半径为 1 的四个小球垒成两层放在桌子上，下层放 3 个，上层放 1 个，两两相切，求上层的最高点离桌面的距离.

【例五】棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的 8 个顶点都在球 O 的表面上， E, F 分别是棱 AA_1, DD_1 的中点，则直线 EF 被球 O 截得的线段长为()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{1}$ B. 1
C. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\sqrt{2}$

8.4.1 平面、空间点、直线、平面之间的位置关系

学习目标

1. 初步理解平面的概念，掌握平面的表示方法
2. 了解并学会用文字语言、图形语言、符号语言表示点、线、面的位置关系
3. 掌握平面的三个公理及推论的三种语言表示，初步掌握它们的简单运用及公理化方法

课前提助餐

1. “点动成线，线动成面”，如果把点看成是元素，线和面都可以看成是点的集合，用集合的语言描述点、线、面之间的关系：

图形表示	文字表示	符号表示
	点 P 在直线 l 上	
	点 Q 在直线 l 外	
	点 A 在平面 α 内	
	点 B 在平面 α 外	
	直线 l 在平面 α 内 (平面 α 经过直线 l)	
	直线 a 和直线 b 都在平面 α 外 (直线 a 与平面 α 平行, 直线 b 与平面 α 相交于点 A)	
	平面 α 与平面 β 相交于直线 l	

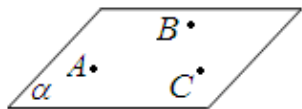
2. 基本事实 1: 过_____的_____点, 有且只有一个平面.

基本事实 2: 如果一条直线上的_____在一个平面内, 那么这条直线在此平面内.

基本事实 3: 如果两个平面有一个公共点, 那么他们有且只有_____通过这个点的公共直线.

重难点突破

- ★问题 1: 我们知道: 两点可以确定一条直线. 那么几点可以确定一个平面呢? 举例说明.



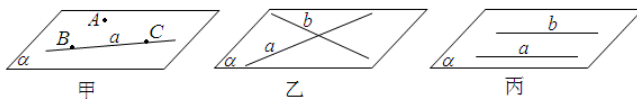
基本事实 1: 过_____的_____点, 有且只有一个平面.

【思考 5】: 你能写出基本事实 1 的符号表示及作用吗?

基本事实 1 的符号表示: _____

作用: 可用于证明点、线共面问题以及延展平面.

【思考 1】: 不共面的四点可以确定几个平面?

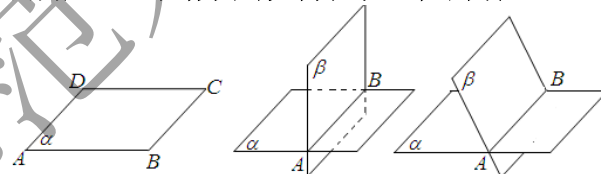


推论 1: 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面 (如图甲).

推论 2: 经过两条相交直线, 有且只有一个平面 (如图乙).

推论 3: 经过两条平行直线, 有且只有一个平面 (如图丙).

★问题 2: 在作图时如何表示一个平面呢?



答: 如上图, 通常用_____来表示平面, 应注意:

(1) 锐角 A 画成_____度, 横边画成等于邻边的_____;

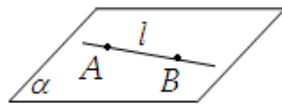
(2) 画两个相交平面时, 被遮住的部分画成_____或_____, 以增强立体感.

(3) 平面通常用 α, β, γ 等写在代表平面的平行四边形的一个角上, 如平面 α , 也可用表示平行四边形的两个相对顶点的字母表示, 如平面 AC.

【思考 2】: 能不能说一个平面长 4 米, 宽 2 米? 为什么?

【思考 3】: 不重合的三个平面把空间分成 n 个部分, 则 n 的可能值为多少?

★问题 3: 如果直线 l 与平面 α 有一个公共点 P, 直线 l 是否在平面 α 内? 如果直线 l 与平面 α 有两个公共点呢?



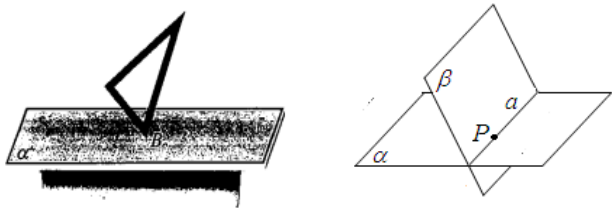
基本事实 2: 如果一条直线上的_____在一个平面内, 那么这条直线在此平面内.

〔思考 4〕: 你能写出基本事实 2 的符号表示及作用吗?

基本事实 2 的符号表示: _____

作用: 可以判断或证明一条直线是否在一个平面内(只要证明直线上两个不同的点在平面内就可以了)以及延展平面

★问题 3: 如果把三角板的一个角立在课桌面上, 三角板所在平面与桌面所在平面是否只相交于一个点? 为什么?



基本事实 3: 如果两个平面有一个公共点, 那么他们有且只有_____通过这个点的公共直线.

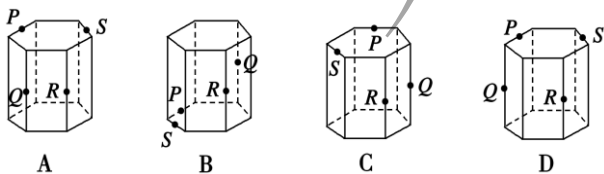
〔思考 5〕: 你能写出基本事实 3 的符号表示及作用吗?

基本事实 3 的符号表示: _____

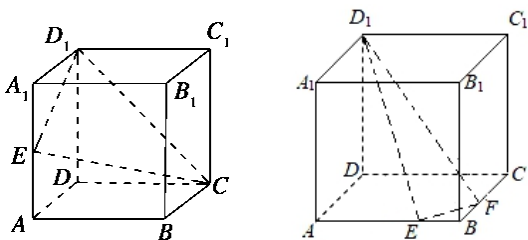
作用: 可用于画两个平面的相交线以及证明线共点、点共线的问题。(判定两平面相交的依据)

典例解析

【例一】(1) 下列各图均是正六棱柱, P 、 Q 、 R 、 S 分别是所在棱的中点, 这四个点不共面的图形是()



(2) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 AA_1 的中点, 画出过 D_1 、 C 、 E 的平面与平面 ABB_1A_1 的交线, 并说明理由.



(例一 (2) 图)

(例一 (3) 图)

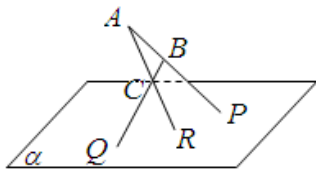
(3) 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 F 分别是棱 AB 、 BC 上靠近点 B 的三等分点, 过点 D_1 、 E 、 F 的截面将正方体分割成两个部分, 记这两个部分的体积分别为 V_1 、 V_2 , 记 $V_1 < V_2$, 求 $V_1: V_2$.

(更多画交线的题目见实验班 12、13、15 题)

【例二】下列说法中, 正确的选项有_____个.

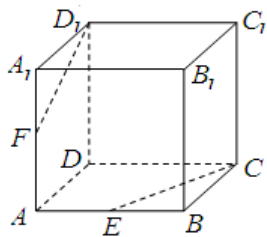
- ① 圆心与圆周上两点可以确定一个平面;
- ② 空间中, 两两相交的三条直线确定一个平面;
- ③ 空间中, 有三个角为直角的四边形一定是矩形;
- ④ 三条平行直线一定在同一平面内.
- ⑤ 已知 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五点中, A 、 B 、 C 、 D 共面, B 、 C 、 D 、 E 共面, 则 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五点一定共面.

【例三】已知 $\triangle ABC$ 在平面 α 外, $AB \cap \alpha = P$, $AC \cap \alpha = R$, $BC \cap \alpha = Q$, 如下图, 求证: P 、 Q 、 R 三点共线.



【例四】如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为 AB 的中点, F 为 A_1A 的中点, 求证:

- (1) E 、 F 、 D_1 、 C 四点共面;
- (2) CE 、 D_1F 、 DA 三线共点.



8.4.2 空间点、线、面之间的位置关系 2

学习目标

1. 了解空间两条直线的三种位置关系
2. 了解异面直线所成角的定义, 会用平移转换法求异面直线所成的角, 初步体会将空间问题转化为平面问题的数学思想
3. 了解并掌握基本事实 4 及等角定理, 并会应用它们来证明简单的几何问题
4. 认识与掌握直线与平面、平面与平面之间的位置关系

课前自助餐

1. 空间两条直线的位置关系有且只有三种:

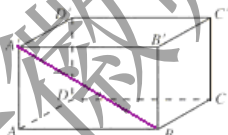
{	共面直线	相交直线: 同一平面内, 有且只有 <u> </u> 个公共点;
		平行直线: 在同一平面内, <u> </u> 公共点;
	异面直线:	不同在任何一个平面内, <u> </u> 公共点.
2. 异面直线所成角的定义: 已知两条异面直线 a, b , 经过空间任一点 O 作 直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ 则把 a' 与 b' 所成的 叫做异面直线所成的角(或夹角). 其范围为 .
3. 基本事实 4: 在空间平行于同一条直线的两条直线 .
4. 平面与平面之间的位置关系有且只有两种:

{	两个平面 <u> </u>	——没有公共点;
	两个平面 <u> </u>	——有一条 <u> </u> .

重难点突破

★问题 1: 在下长方体的各条棱所在的直线中, 与线段 $A'B$ 所在的直线成异面直线的有几条?

答:

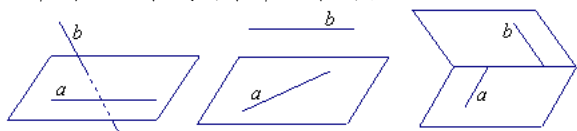


【思考 1】: 分别在两个平面内的两条直线是否一定异面?

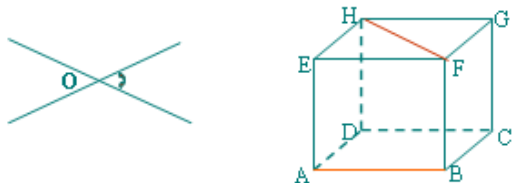
【思考 2】: 不相交的两条直线是否一定异面?

★问题 2: 对于空间中的两条异面直线, 在作图时该如何表示?

☆说明: 画异面直线时, 为了体现它们不共面的特点. 常借助一个或两个平面来衬托.



★问题 3: 异面直线的错开程度可以怎样来刻画的?

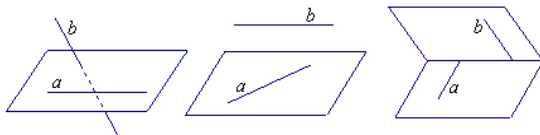


【引导思考】: 平移转化成相交直线所成的角, 即化空间图形问题为平面图形问题.

异面直线所成角的定义:

如图, 已知两条异面直线 a, b , 经过空间任一点 O 作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$ 则把 a' 与 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线所成的角(或夹角).

【小练习 1】请在下列图中分别作出异面直线 a 与 b 所成的角 θ .



★问题 4: 异面直线所成的角的范围是多少?

答:

☆注 1: 如果两条异面直线 a, b 所成的角为直角, 我们就称这两条直线互相垂直, 记为 $a \perp b$.

【思考 3】: 垂直于同一直线的两条直线, 有几种位置关系?

答:

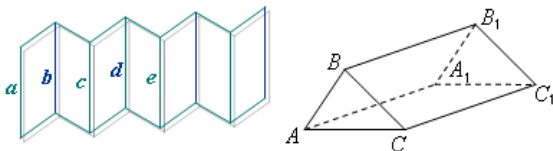
【思考 4】: 这个角的大小与 O 点的位置有关吗? 即 O 点位置不同时, 这一角的大小是否改变?

答:

★问题 5: 为什么异面直线所成的角与 O 点位置的选取无关? 有什么样的理论支持?

【引导思考 1】: 我们知道, 在同一平面内, 如果两条直线都和第三条直线平行, 那么这两条直线互相平行. 在空间这一规律是否还成立呢?

☆观察: 将一张纸如图进行折叠, 则各折痕及边 $a, b, c, d, e, \dots$ 之间有何关系? 三棱柱的各侧棱之间有什么关系?

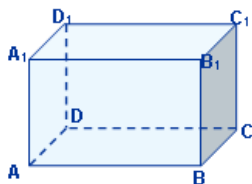


基本事实 4: 在空间平行于同一条直线的两条直线互相平行. ——平行线的传递性

推广: 在空间平行于一条已知直线的所有直线都互相平行.

【引导思考 2】: 在平面内, 我们可以证明 “如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行, 那么这两个角相等或互补”. 空间中这一结论是否仍然成立呢?

☆观察：如图所示，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $\angle ADC$ 与 $\angle A_1D_1C_1$ ， $\angle ADC$ 与 $\angle A_1B_1C_1$ 两边分别对应平行，这两组角的大小关系如何？



定理（等角定理）：空间中，如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补。

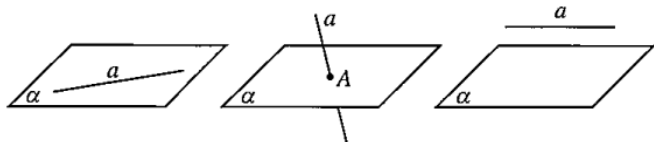
【思考5】：你能否写出“等角定理”的证明过程？

★问题6：直线与平面之间又有几种位置关系？

答：直线与平面的位置关系有且只有三种：

- (1) 直线在平面内——有_____个公共点；
- (2) 直线与平面相交——有_____个公共点；
- (3) 直线与平面平行——_____公共点；

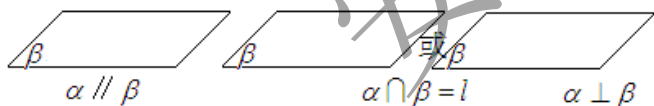
用符号语言表示这三种关系：



★问题7：两个平面之间又有几种位置关系？

答：_____

★问题8：在作图时如何刻画平面之间的平行与相交？



典例解析

【例一】（1）下列命题中，正确的有_____。（填序号）

- ① 两条直线互相垂直，它们一定相交；
- ② 没有公共点的两条直线叫做平行直线；
- ③ 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线；
- ④ 与同一条直线垂直的两条直线平行；
- ⑤ 不同在任何一个平面内的两条直线是异面直线；
- ⑥ 若直线 a 与 b 异面， b 与 c 异面，则 a 与 c 也异面。

（2）若两个平面互相平行，则分别在这两个平行平面内的直线（ ）

- A. 平行
- B. 异面
- C. 相交
- D. 平行或异面

（3）平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta = l$ ，点 $A \notin \alpha$ ， $A \notin \beta$ ，则过 A 可以作_____条直线与 α 、 β 同时平行。

【例二】（重庆卷）对于任意的直线 l 与平面 α ，在平面 α 内必有直线 m ，使 m 与 l （ ）

- A. 平行
- B. 相交
- C. 垂直
- D. 互为异面直线

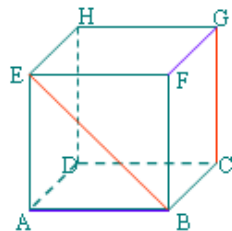
【例三】经过平面外的两点作该平面的平行平面，可以作（ ）

- A. 0 个
- B. 1 个
- C. 0 个或 1 个
- D. 1 个或 2 个

【例四】如图，正方体 $ABCD-EFGH$ 中如图，正方体 $ABCD-EFGH$ 中 O 为侧面 $ADHE$ 的中心，求

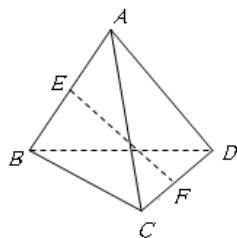
(1) BE 与 CG 所成的角？

(2) FO 与 BD 所成的角？



【点评】：求异面直线的步骤是：“一作(找)二证三求”

【例五】在空间四边形 $ABCD$ 中， $AD=BC=2a$ ， E 、 F 分别是 AB 、 CD 的中点， $EF=\sqrt{3}a$ ，求 AD 、 BC 所成的角。



8.5.1 直线与平面平行的判定与性质

学习目标

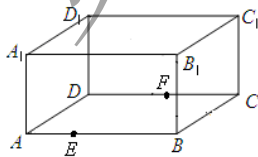
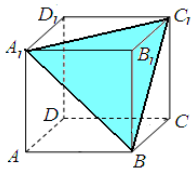
1. 了解直线与平面平行的定义
2. 掌握直线与平面平行的判定定理，会用符号语言和图形语言来描述它们
3. 了解并掌握直线与平面平行的性质定理，会用符号语言和图形语言来描述它们，明确由线面平行可以得到线线平行
4. 比较直线与平面的判定定理与性质定理的区别和联系，体会线线平行与线面平行之间相互转化的思想

课前自助餐

1. 如果一条直线 l 和平面 α _____ 公共点，我们称直线 l 和平面 α 平行，记为 _____.
2. 直线与平面平行的判定定理： _____

直线与平面平行的性质定理： _____

- 3: 如图正（长）方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，在图（1）中画出面 A_1BC_1 与底面 $ABCD$ 的交线 l ；在图（2）中画出平面 EFD_1 与平面 AC 、平面 AD_1 、平面 AB_1 、平面 DC_1 的交线.



重难点突破

★问题 1：怎样判定直线与平面平行呢？

答：只需 _____

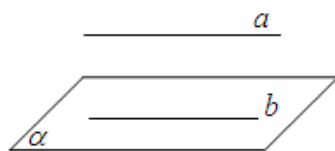
★问题 2：结合翻书和开门的过程，说一说：如果在平面 α 内有一条直线 b 与直线 a 平行，那么直线 a 与平面 α 是否一定平行？

已知： $a \not\subset \alpha, b \subset \alpha,$

$a \parallel b.$

求证： $a \parallel \alpha.$

证明：



直线与平面平行的判定定理：

平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.

★问题 3：如何用数学符号来描述这个判定定理？

答：用数学符号表示：

$$\left. \begin{array}{l} a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \alpha.$$

★问题 4：这个定理有什么用？反映了什么样的数学思想？

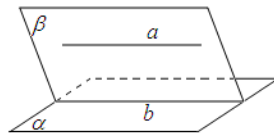
? $\Rightarrow$ 线面平行
? $\Leftarrow$ 空间问题

答：

（证明线与面平行的关键：在平面内找一条直线与平面外的直线平行）

★问题 5：反过来，如果直线与平面平行，直线与平面中的任意一条直线都平行吗？若不成立，平面中满足什么条件的直线能与已知直线平行？

〔引导思考 1〕若 $\alpha \cap \beta = b, a \parallel \alpha, a \subset \beta$ ，问直线 a 与 b 一定平行吗？若是请证明.



直线与平面平行的性质定理：

一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行.

★问题 6: 如何用数学符号语言刻画上述定理?

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} a // b$$

推论: 过平面内一点的直线平行于与该平面平行的一条直线，则这条直线在这个平面内.

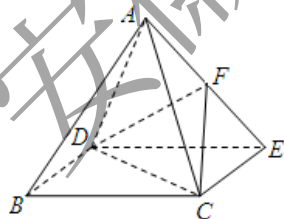
注: 上面性质定理揭示了怎样的数学思想?

★问题 7: 这个定理与我们前面所学习的直线与平面的判定定理有什么区别与联系?

	判定定理	性质定理
区别		
联系		

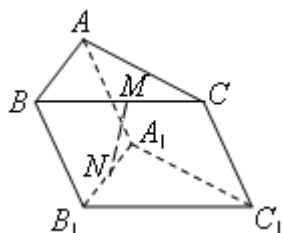
典例解析

【例一】(1) (天津卷) 如图, 四棱锥 $A-DBCE$ 中, O 为底面正方形 $DBCE$ 对角线的交点, F 为 AE 的中点. 求证: $AB // \text{平面 } DCF$.



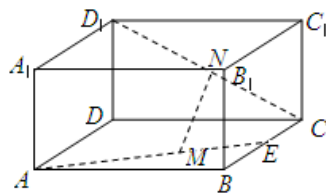
(2) 如下图, 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M 、 N 分别是 BC 和 A_1B_1 的中点.

求证: $MN // \text{平面 } AA_1C_1$.



(3) 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 、 P 分

别是 BC 、 A_1D_1 的中点, M 、 N 分别是 AE 、 CD_1 的中点, 求证: $MN // \text{平面 } ADD_1A_1$.



【点评】: 1. 判定定理的思路: 欲证“线面平行”, 必须先证“线线平行”.

2. 平面几何中证明线线平行的一般方法:

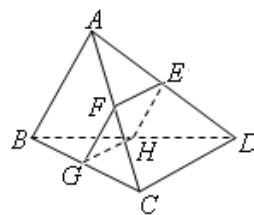
- ① 空间几何体的结构特征;
- ② 平行四边形的性质;
- ③ 三角形中位线性质;
- ④ 基本事实 4;
- ⑤ 平行线的判定定理.

$$\textcircled{6} \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow \angle AEF = \angle ABD \Rightarrow EF // BD \dots\dots$$

【例二】如图, 平面 $EFGH // AB$, 平面 $EFGH // CD$.

(1) 求证: 四边形 $EFGH$ 是平行四边形;

(2) 如果 $AB = CD = a$, 求证四边形 $EFGH$ 的周长为定值.

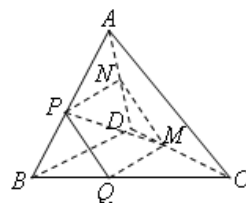


(3) (江西卷) 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, 截面 $PQMN$ 是正方形, 给出下列结论: ① $AC \perp BD$; ② $AC // \text{截面 } PQMN$; ③ $AC = BD$;

④ 异面直线 PM 与 BD 所成的角为 45° .

其中正确的序号

有_____



8.5.2 平面与平面平行的判定与性质

学习目标

1. 了解平面与平面平行的定义，掌握两个平面平行的判定定理和性质定理，会用符号语言和图形语言来描述它们
2. 掌握通过线面平行证明面面平行的方法，同时会用面面平行得到新的线线平行或线面平行，并会分析每种推导的前提条件
3. 结合具体问题体会线线平行、线面平行、面面平行之间的互相转化关系

课前自助餐

1. 如果平面 α 与平面 β _____，我们说平面 α 与平面 β 平行，记为_____.
2. 平面与平面平行的判定定理：_____

两个平面平行的性质定理：_____

3. 垂直于同一条直线的两个平面互相_____.

重难点突破

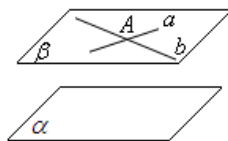
★问题 1：判定两个平面平行需要判定一个平面内的所有直线都平行于另一个平面吗？

★问题 2：如果平面 β 内有一条直线与平面 α 平行，平面 α 与平面 β 平行吗？如果平面 β 内有两条直线与平面 α 平行，平面 α 与平面 β 平行吗？这两条直线间应满足什么关系？

★问题 3：如果平面 β 内有两条相交直线与平面 α 平行，平面 α 与平面 β 平行吗？

已知： $a \subset \beta, b \subset \beta, a \cap b = A, a \parallel \alpha, b \parallel \alpha$.

求证： $\beta \parallel \alpha$.



【思考】：如果平面 β 内有无数条直线与平面 α 平行，平面 α 与平面 β 一定平行吗？为什么？ 答：_____

平面与平面平行的判定定理：

一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

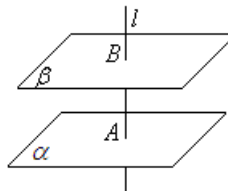
★问题 5：对于这个判定定理，用数学符号语言该如何表示：

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \parallel \beta.$$

证明：（两平面平行判定定理 2）

垂直于同一条直线的两个平面平行.

☆注：直线与平面垂直即指垂直于平面上所有的直线.



推论：一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面内的两条相交直线，那么这两个平面平行.

（注：一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面.）

【思考】：你现在能说出几种证明面与面平行的方法？判定两个平面平行的常用方法：

- (1) _____
- (2) _____
- (3) _____
- (4) _____

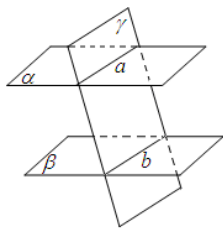
★问题 6: 如果两个平面平行, 那么一个平面内的直线与另一个平面内的直线具有什么位置关系?

答: _____

★问题 7: 如果两个互相平行的平面被第三个平面所截, 那么两条交线之间有什么位置关系? 你能给出证明吗?

答: _____

如图, 若三个平面 α, β, γ 满足: $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$. 求证: $a \parallel b$.



两个平面平行的性质定理:

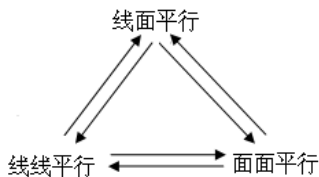
如果两个平行平面同时和第三个平面相交, 那么它们的交线平行.

★问题 8: 如何用数学符号语言刻画上述定理?

$\left. \begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$

推论: 两个平面平行, 其中一个平面内的直线必平行于另一个平面.

★问题 9: 两个平面平行的性质定理与判定定理之间有什么区别和联系? 它们与前面的直线与平面平行的判定与性质又有什么联系?



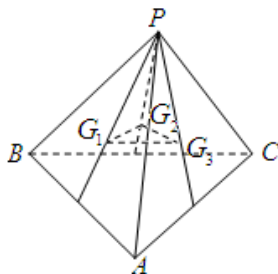
【例一】 α, β 是两个不重合的平面, 在下列条件中, 可判定平面 α 与 β 平行的是 ()

- A. $a \parallel \alpha, a \parallel \beta$
- B. α 内不共线的三点到 β 的距离相等
- C. α 内无数条直线都与 β 平行
- D. l, m 是两条异面直线, 且 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha, l \parallel \beta, m \parallel \beta$.

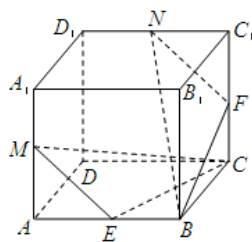
【例二】 已知 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面外一点, G_1, G_2, G_3 分别是 $\triangle PAB, \triangle PCB, \triangle PAC$ 的重心.

(1) 求证: 平面 $G_1G_2G_3 \parallel$ 平面 ABC ;

(2) 求: $S_{\triangle G_1G_2G_3} : S_{\triangle ABC}$.



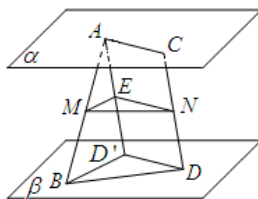
【例三】 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, M, N 分别为棱 AB, CC_1, AA_1, C_1D_1 的中点, 求证: 平面 $CEM \parallel$ 平面 BFN .



【例四】 如图, 已知平面 $\alpha \parallel \beta$, 直线 AB 分别交 α, β 于点 A, B , 直线 CD 分别交 α, β 于点 C, D ,

M, N 分别在线段 AB, CD 上, 且 $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$.

求证: $MN \parallel$ 平面 β .



8.6.1 直线与直线的垂直

知识点1 异面直线所成的角

(1)定义: 已知两条异面直线 a, b , 经过空间任一点 O 分别作直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$, 我们把直线 a' 与 b' 所成的角叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角).

(2)空间两条直线所成角 α 的取值范围:
 $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

知识点2 空间两直线垂直

如果两条异面直线所成的角是 直角, 那么我们就说这两条异面直线互相垂直. 直线 a 与直线 b 互相垂直, 记作 $a \perp b$.

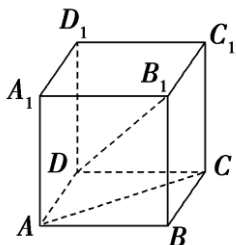
【小练习1】 设 a, b, c 是三条直线, 且 $c \perp a, c \perp b$, 则 a 和 b ()

- A. 平行 B. 相交
C. 异面 D. 以上都有可能

【小练习2】 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=1, AA_1=\sqrt{3}$, 则异面直线 AD_1 与 DB_1 所成角的余弦值为()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

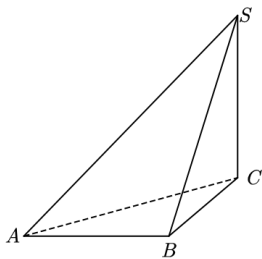
【例一】 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 求证: $AC \perp B_1D$.



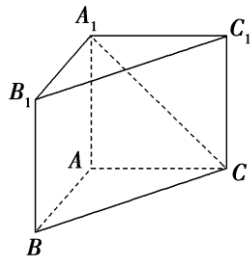
【例二】(1) 我国古代将四个面都是直角三角形的四面体称作鳖臑. 如图, 在鳖臑 $S-ABC$ 中 $SC \perp$ 平面 ABC , $\triangle ABC$ 是以点 B 为直角顶点的等腰直角三角形, 且 $AB=SC$, 则异面直线 BC 与 SA 所成角的正切值为

()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$



(例二(1)图)



(例二(2)图)

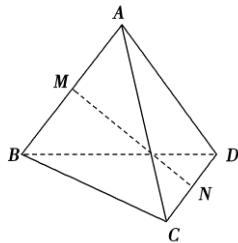
(2) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp AB, AA_1 \perp AC$. 若 $AB=AC=AA_1=1, BC=\sqrt{2}$, 则异面直线 A_1C 与 BC_1 所成的角余弦值为_____.

【例三】(1) 空间四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别为 AC, BD 中点, 若 $CD=2AB, EF \perp AB$, 则 EF 与 CD 所成的角为()

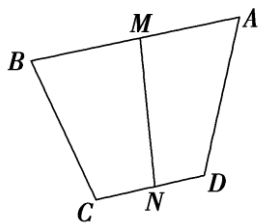
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

(2) 如图所示, 空间四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC=8, BD=6, M, N$ 分别为 AB, CD 的中点, 并且异面直线 AC 与 BD 所成的角为 90° , 则 MN 等于()

- A. 5 B. 6 C. 8 D. 10



(例三(2)图)

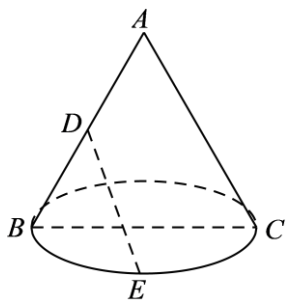


(例三(3)图)

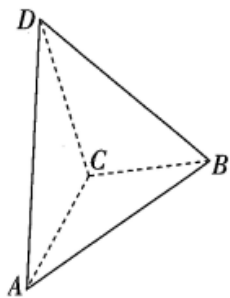
(3) (2020 湖南省永州市期末) 如图, 已知空间四边形 $ABCD$ 中, $AD=BC, M, N$ 分别为 AB, CD 的中点, 且直线 BC 与 MN 所成的角为 30° , 求 BC 与 AD 所成的角.

【例四】(1) 如图, 某圆锥的轴截面 ABC 是等边三角形, 点 D 是线段 AB 的中点, 点 E 在底面圆的圆周上,

且 BE 的长度是 CE 长度的两倍, 则异面直线 DE 与 AC 所成角的正弦值是_____



(例四 (1) 图)



(例四 (2) 图)

(2) 如图, 在三棱锥 $D-ABC$ 中, $\angle DAC = \angle BCA = \angle BCD = 90^\circ$, $DC = \sqrt{19}$, $AB = 3$, 且直线 AB 与 DC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{19}}{19}$, 则该三棱锥的外接球的体积为 ()

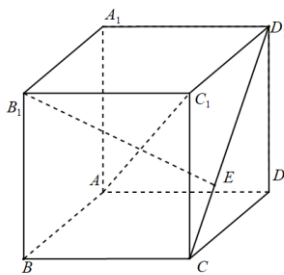
- A. $\frac{45\pi}{2}$ B. $\frac{75\pi}{4}$ C. $\frac{125\pi}{6}$ D. $\frac{65\pi}{3}$

【例五】(1) 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 B_1C 上运动, 则异面直线 AP 与 A_1D 所成角的取值范围是_____.

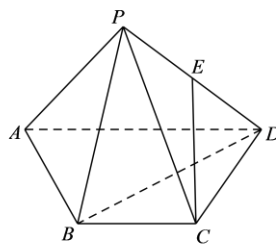
(2) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是线段 CD_1 上的动点, 则下列判断:

- ①三棱锥 $B-AB_1E$ 的体积是定值与 E 点位置无关;
 ②若异面直线 B_1E 与 AD 所成的角为 θ , 则 $\cos \theta$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$;
 ③无论点 E 在线段 CD_1 的什么位置, 都有 $AC_1 \perp B_1E$;
 ④当点 E 与线段 CD_1 的中点重合时, B_1E 与 AC_1 异面.
 其中正确的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



(例五 (2) 图)

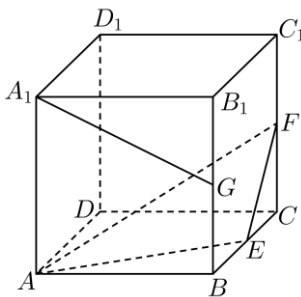


(例五 (3) 图)

(3) (多选题) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABD = 90^\circ$, $AD = 2BC$, $\triangle PAB$ 是边长为 1 的等边三角形, E 为 PD 的中点, 则 ()

- A. $AB \perp PD$
 B. 直线 AB 与 CE 所成的角为 30°
 C. $CE \parallel$ 平面 PAB
 D. 线段 CE 的长度为 $\frac{1}{2}$

【例六】(多选题) 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, E, F, G 分别为 BC, CC_1, BB_1 的中点. 则 ()



- A. 直线 D_1D 与直线 AF 垂直
 B. 直线 A_1G 与平面 AEF 平行
 C. 平面 AEF 截正方体所得的截面面积为 $\frac{9}{2}$
 D. 四面体 A_1BC_1D 与四面体 AB_1CD_1 的公共部分的体积是 $\frac{4}{3}$

8.6.2 直线与平面垂直的判定与性质

学习目标

1. 概括和理解直线与平面垂直的定义, 掌握平面的垂线、直线的垂面、垂足等概念
2. 归纳和掌握直线与平面垂直的判定定理的条件, 学会利用它来证明相关问题
3. 进一步体会和熟练空间问题平面化的转化思想

课前自助餐

1. 如果直线 l 与平面 α 内的_____直线都垂直, 我们就说直线 l 与平面 α 垂直, 记作_____.
直线 l 叫平面 α 的_____, 平面 α 叫做 l 的_____.
直线与平面垂直时, 它们唯一的公共点 P 叫做_____.
2. 直线和平面垂直的判定定理:
一条直线与一个平面内_____直线都垂直, 则该直线与此平面垂直.
3. (1) 过一点_____一条直线和一个平面垂直;
(2) 过一点_____一个平面和一条直线垂直;
(3) 两条_____线中的一条和一个平面垂直, 那么另一条也和这个平面垂直.
4. 平面内的一条斜线和它在平面上的射影所成的_____叫做这条直线和这个平面所成的角, 其取值范围为_____.

重难点突破

★问题 1: 一条直线至少要与平面上的几条直线垂直, 才能得到直线与平面垂直? 平面上的这些线有什么关系? 画出相应的几何图形.

直线和平面垂直的判定定理:

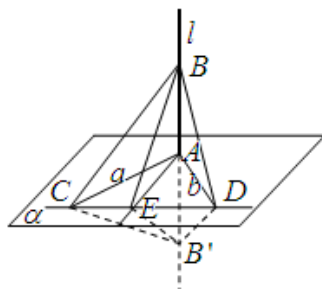
一条直线与一个平面内_____直线都垂直, 则该直线与此平面垂直.

〔思考 1〕: 用数学符号语言该如何表示?

〔思考 2〕: 如何证明上面的结论?

已知: $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \cap b = A, l \perp a, l \perp b$.

求证: $l \perp \alpha$.



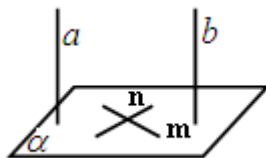
〔思考 3〕: 如果一条直线垂直于一个平面内的无数条直线, 那么这条直线与这个平面垂直吗?

答: _____

〔思考 4〕: 判定定理的作用是什么?

★问题 2: 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于这个平面吗?

已知: $a \parallel b, a \perp \alpha$, 求证: $b \perp \alpha$.



直线与平面垂直的判定定理 2:

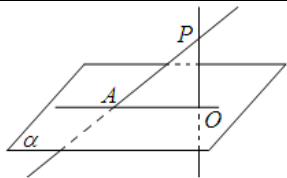
如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于这个平面.

几个结论:

- (1) 过一点_____一条直线和一个平面垂直;
- (2) 过一点_____一个平面和一条直线垂直;
- (3) 两条_____线中的一条和一个平面垂直, 那么另一条也和这个平面垂直.

(注: 过一点作垂直于已知平面的直线, 则该点与_____垂足_____间的线段, 叫做这个点到该平面的垂线段, 垂线段的_____长度_____叫做这个点到该平面的距离)

★问题 3: 若直线与平面垂直, 我们就说它们所成的角是直角, 如果直线与平面不垂直 (相交或平行或在面上), 那又如何刻画直线与平面所成的角呢?



平面内的一条斜线和它在平面上的射影所成的角叫做这条直线和这个平面所成的角。

★问题 4: 直线和平面所成的角的范围是多少?

答: _____.

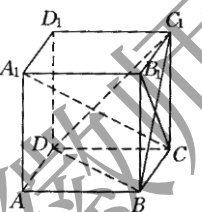
【思考 5】: 两条直线和一个平面所成的角相等, 这两条直线一定平行吗? 画图说一说。

【小练习 1】下列说法正确的有 _____ (填序号)。

- ①垂直于同一条直线的两条直线平行;
- ②如果一条直线与一个平面内的一条直线不垂直, 那么这条直线就一定不与这个平面垂直;
- ③如果一条直线垂直于平面内的两条直线, 那么这条直线与这个平面垂直;
- ④若 l 与平面 α 不垂直, 则平面 α 内一定没有直线与 l 垂直.

【小练习 2】如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 求证: (1) $A_1C \perp$ 平面 BC_1D .

(2) A_1C 与面 BC_1D 的交点是 A_1C 的一个三等分点.

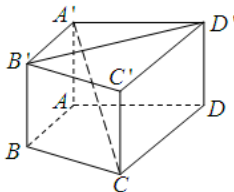


典例解析

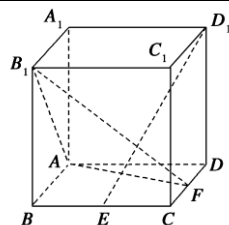
【例一】(1) 如图, 直四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中, 底面四边形 $ABCD$ 要满足什么条件时, $A'C \perp B'L$? 请给定一个条件并证明.

解: 所给条件为 _____

证明:



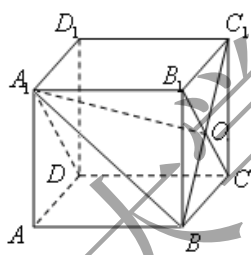
(2) 如图所示, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E 是棱 BC 的中点, 点 F 是棱 CD 上的动点. 试确定点 F 的位置, 使得 $D_1E \perp$ 平面 AB_1F .



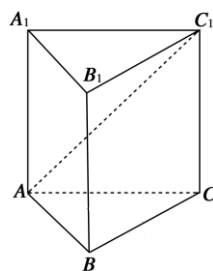
【例二】(1) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=BC=2$, AC_1 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 30° , 则该长方体的体积为()

- A. 8 B. $6\sqrt{2}$ C. $8\sqrt{2}$ D. $8\sqrt{3}$

(2) 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 A_1B 和平面 A_1B_1CD 所成的角大小为 _____.



(例二 (2) 图)

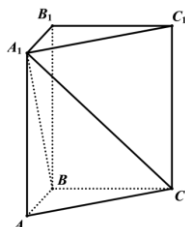


(例二 (3) 图)

(3) 如图, 在棱长均为 1 的直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 求直线 AC_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

【例三】(1) (2022·全国·高一专题练习) 若点 A, B 到 α 的距离分别为 3 和 5, 则线段 AB 的中点到 α 的距离为 _____.

(2) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB=BC=1$, $BB_1=2$. 则点 B_1 与平面 A_1BC 的距离为 _____.



8.6.3 直线与平面垂直的性质

学习目标

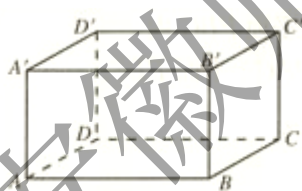
1. 了解并掌握直线与平面垂直的性质定理,明确由线面垂直可以得到线线平行,并结合具体问题体会平行与垂直的相互转化关系
2. 整理归纳出证明线线平行的常用方法

【复习引入】

1. 直线与平面垂直的判定定理 1: _____
2. 直线与平面垂直的判定定理 2: _____
3. 从平面外一点引一个平面的垂线,则_____叫做这个点到这个平面的距离;一条直线和一个平面平行,则_____叫做这条直线和平面的距离;两个平面平行,则_____叫做这两个平面间的距离.
4. 直线和平面垂直的性质定理: (1)
如果一条直线垂直于一个平面,那么这条直线垂直于_____.

重难点突破

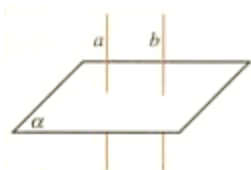
- ★问题 1: 如图,长方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,棱 AA', BB', CC', DD' 所在直线都垂直于平面 $ABCD$, 它们之间具有什么位置关系?



直线和平面垂直的性质定理: (2)

如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行.

- ★问题 2: 你能用数学符号语言描述出上面的定理吗? 如何证明?



☆注: 反之, 若 $a \perp \alpha, b \parallel a \Rightarrow b \perp \alpha$. (就是判定

定理 2)

【思考 1】: 垂直于同一条直线的两条直线之间是什么位置关系? :

答: _____

【思考 2】: 垂直于同一条直线的两个平面之间是否平行?

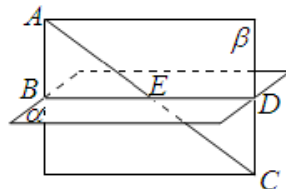
★问题 3: 上述定理有什么样的作用?

典例解析

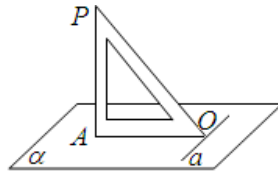
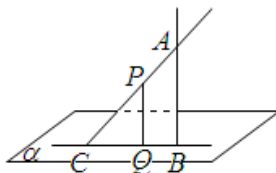
【例一】(辽宁卷)若 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 则下列命题中的真命题是 ()

- A. 若 $m \subset \beta, \alpha \perp \beta$, 则 $m \perp \alpha$
- B. 若 $\alpha \cap \gamma = m, \beta \cap \gamma = n, m \parallel n$, 则 $\alpha \parallel \beta$
- C. 若 $m \perp \beta, m \parallel \alpha$, 则 $\alpha \perp \beta$
- D. 若 $\alpha \perp \gamma, \alpha \perp \beta$, 则 $\beta \perp \gamma$

【例二】如图, $AB \perp$ 平面 α 于 B , $CD \perp$ 平面 β 于 D , 直线 $AC \cap$ 平面 $\alpha = E$, 求证: B, D, E 三点共线.



【思考 1】: 如下左图所示, 设斜线为 AC , 垂线为 BA , 斜线在平面上的射影为 BC , 证明: 对于斜线 AC 上异于 A, C 的任意一点 P , 其射影 Q 必在 BC 所在的直线上吗?



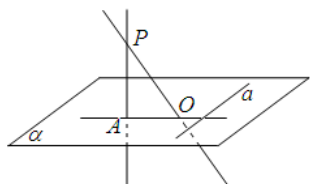
【思考 2】在桌面上竖直放一三角板 (如上右图), 若 $a \perp AO$, 那么 $a \perp PO$ 吗?

【例三】如图, 已知 PA, PO 分别是平面 α 的垂线、斜

线, AO 是 PO 在平面 α 上的射影. $a \subset \alpha$, $a \perp AO$.

求证: $a \perp PO$.

证明:



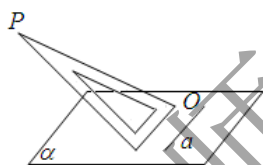
补充: 三垂线定理:

在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线的_____垂直, 那么它也和这条斜线垂直.

★问题 4: 三垂线定理中的“三线”指的是哪三条线? 它们之间有怎样的位置关系?

★问题 5: 反过来, 如果面上直线 a 与斜线 PO 垂直, 那它与斜线在平面 α 上的射影 AO 垂直吗?

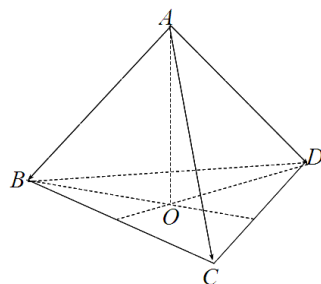
【思考 5】在桌面上斜放一三角板, 并使得一直角边在平面 α 上 (如图), 若 $a \perp PO$, 那么 a 垂直 PO 在 α 上的投影吗?



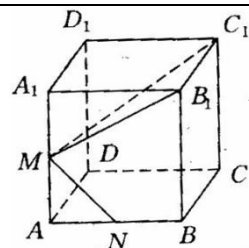
三垂线定理的逆定理:

在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线的_____垂直.

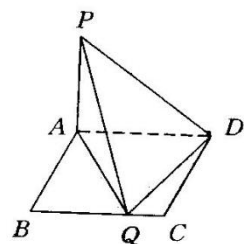
【例四】四面体 $A-BCD$ 中, $AB \perp CD$, $AD \perp BC$. 求证: $AC \perp BD$.



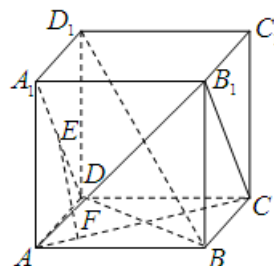
【例五】如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 是 AA_1 的中点, 问当点 N 位于 AB 上何处时, $MN \perp MC_1$?



【例六】如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1$, $BC=a$, $PA \perp$ 面 $ABCD$, 且 $PA=1$, 若 BC 边上始终存在点 Q , 使得 $PQ \perp QD$, 则 a 的取值范围为_____.



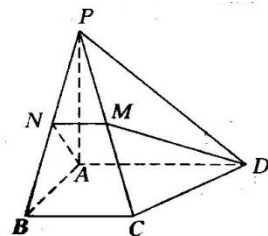
【例七】如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, EF 与异面直线 AC 、 A_1D 都垂直相交, 求证: $EF \parallel BD_1$.



【例八】如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面为直角梯形, $AD \parallel BC$, $\angle BAD=90^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $PA=AD=AB=2BC$, M 、 N 分别为 PC 、 PB 的中点.

(1) 求证: $PB \perp DM$;

(2) 求 CD 与平面 $ADMN$ 所成的角的正弦值.



8.6.4 平面与平面垂直的判定

学习目标

1. 了解两个平面垂直的定义, 掌握两个平面垂直的判定定理及两个平面垂直的证明方法
2. 掌握线线垂直、线面垂直、面面垂直之间的相互转化

课前自助餐

1. 线面垂直的证明常用方法:
 - (1) _____
 - (2) _____
2. 面面垂直的定义: 两个平面相交, 如果所成的二面角是_____, 就说这两个平面互相垂直.
3. 两个平面垂直的判定定理: 如果一个平面经过另一个平面的一条_____, 那么这两个平面互相垂直.

重难点突破

★问题 1: 除了用定义法判定两个平面相互垂直, 还可以用其他的方法吗?

☆观察 1: 将一本书打开一点竖立放在桌子上, 书本每一页纸所在的平面跟桌面之间是什么关系? 所有每一页纸所在的平面有什么共同特征?

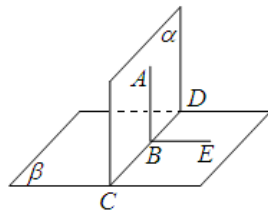
☆观察 2: 开门的时候, 门和地面之间什么位置关系? 所有门所在的平面之间有什么共同特征?

两个平面垂直的判定定理:

如果一个平面经过另一个平面的一条_____, 那么这两个平面互相垂直.

已知: $AB \perp \beta$, $AB \cap \beta = B$, $AB \subset \alpha$.

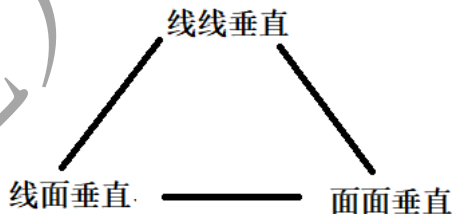
求证: $\alpha \perp \beta$.



★问题 2: 如果一个平面平行于另一个平面的一条垂线, 那么这两个平面互相垂直吗?

★问题 3: 如果一个平面垂直于另一个平面的一条平行线, 那么这两个平面互相垂直吗?

★问题 4: 线线垂直、线面垂直、面面垂直相互之间有什么样的关系? 结合下面的图形进行说明.

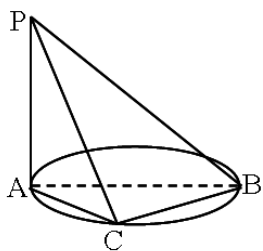


典例解析

【例一】已知直线 a, b 与平面 α, β, γ , 下列能使 $\alpha \perp \beta$ 成立的条件是 ()

- A. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$
- B. $\alpha \cap \beta = a, b \perp a, b \subset \beta$
- C. $a // \beta, a // \alpha$
- D. $a // \alpha, a \perp \beta$

【例二】如图, AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在平面, C 是圆周上任意一点, 求二面角 $A-PC-B$ 的大小.

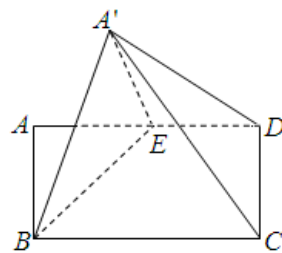
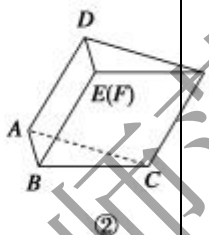
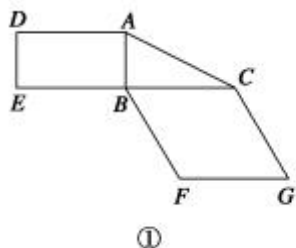


【点评】：证明面面垂直的关键是要找到线面垂直.

【例三】 (2019 全国卷III文)图①是由矩形 $ADEB$, $\text{Rt} \triangle ABC$ 和菱形 $BFGC$ 组成的一个平面图形, 其中 $AB=1$, $BE=BF=2$, $\angle FBC=60^\circ$. 将其沿 AB , BC 折起使得 BE 与 BF 重合, 连接 DG , 如图②.

(1)证明: 图②中的 A, C, G, D 四点共面, 且平面 $ABC \perp$ 平面 $BCGE$;

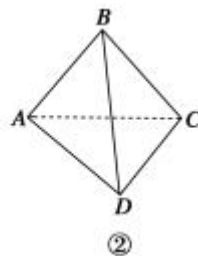
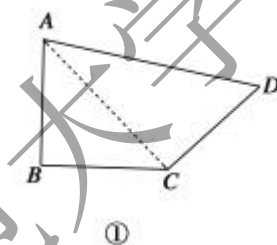
(2)求图②中的四边形 $ACGD$ 的面积.



(2) 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB=BC=CD=a$, $\angle B=90^\circ$, $\angle BCD=135^\circ$. 沿对角线 AC 将四边形折成直二面角, 如图.

(1)求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 BCD ;

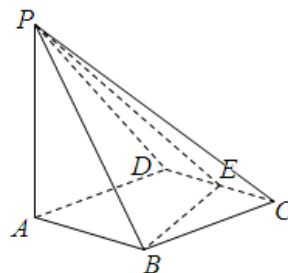
(2)求二面角 $B-AD-C$ 的大小.



【例五】 (湖南卷) 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 1 的菱形, $\angle BCD=60^\circ$, E 是 CD 的中点, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $PA=2$.

(1) 证明: 平面 $PBE \perp$ 平面 PAB ;

(2) 求平面 PAD 和平面 PBE 所成二面角 (锐角) 的大小.



【例四】 (1) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 已知 $AD=2AB$, E 是 AD 的中点, 沿 BE 将 $\triangle ABE$ 折起至 $\triangle A'BE$ 的位置, 使 $A'C = A'D$, 求证: 平面 $A'BE \perp$ 平面 $BCDE$.

8.6.5 平面与平面垂直的性质

学习目标

1. 了解并掌握两个平面垂直的性质定理, 学会将面面垂直问题转化为线面垂直来处理
2. 结合实例体会线线垂直、线面垂直与面面垂直之间相互转化关系

课前自助餐

1. 两个平面垂直的性质定理: 如果两个平面垂直, 那么在一个平面内垂直于它们_____的直线垂直于另一个平面.
2. (1) 如果两个平面互相垂直, 那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线_____.
- (2) 如果两个相交平面都垂直于第三个平面, 那么它们的交线也_____第三个平面.

重难点突破

★问题 1: 平面与平面垂直的判定定理, 解决了两个平面垂直的条件问题; 反之, 在平面与平面垂直的条件下, 能得到哪些结论?

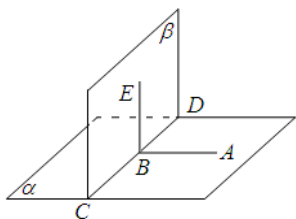
两个平面垂直的性质定理:

如果两个平面垂直, 那么在一个平面内垂直于它们_____的直线垂直于另一个平面.

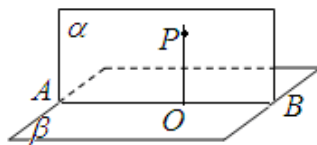
★问题 2: 如何用数学语言符号表述这个定理? 如何证明?

已知:

求证:

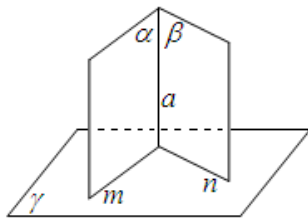


★问题 3: 如图, 若 $\alpha \perp \beta$, 过平面 α 内一点 P 作平面 β 的垂线, 垂足为 O , 那么点 O 在什么位置? 请说明理由?



推论 1: 如果两个平面互相垂直, 那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线, 在第一个平面内.

★问题 4: 如图, 平面 $\alpha \perp$ 平面 γ , 平面 $\beta \perp$ 平面 γ , 且 $\alpha \cap \beta = a$, 问 a 与平面 γ 之间什么关系? 请证明你的结论?



推论 2: 如果两个相交平面都垂直于第三个平面, 那么它们的交线也垂直于第三个平面.

★问题 5: 想一想, 你现在掌握了多少证明线面垂直的方法? 画出示意图.

答: ①_____

②_____

③_____

④_____

⑤_____

⑥_____

.....

典例解析

【例一】 (1) 在空间中, 下列结论正确的是()

A. 若三条直线两两相交, 则这三条直线确定一个平面

B. 若直线 m 与平面 α 内的一条直线平行, 则 m

// α

C. 若平面 $\alpha \perp \beta$, 且 $\alpha \cap \beta = l$, 则过 α 内一点 P 与 l 垂直的直线垂直于平面 β

D. 若直线 $a \parallel b$, 且直线 $l \perp a$, 则 $l \perp b$

(2) 下列命题中是真命题的有_____ (填序号)

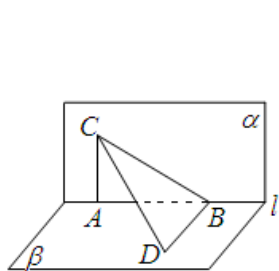
① 三个两两垂直的平面的交线两两垂直.

② 如果三条共点直线两两互相垂直, 那么它们中每两条确定的三个平面也两两互相垂直.

③ 如果 $\beta \perp \alpha, \gamma \perp \alpha, \beta \cap \gamma = l$, 那么 $l \perp \alpha$.

④ 如果一个角的两边分别和另一个角的两边垂直, 那么这两个角相等或互补.

【例二】 (1) 如下左图, 平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 在 α 与 β 的交线 l 上取线段 $AB=4\text{cm}$, AC 、 BD 分别在平面 α 和平面 β 内, $AC \perp l$, $BD \perp l$, $AC=3\text{cm}$, $BD=12\text{cm}$, 则线段 CD 的长为_____.

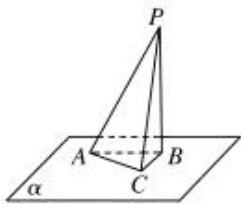


(2) 如上右图, 点 P 为四边形 $ABCD$ 外一点, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA=PD$, E 为 AD 的中点, 则下列结论不一定成立的是()

- A. $PE \perp AC$ B. $PE \perp BC$
C. 平面 $PBE \perp$ 平面 $ABCD$
D. 平面 $PBE \perp$ 平面 PAD

(3) 如图所示, 三棱锥 $P-ABC$ 的底面在平面 α 内, 且 $AC \perp PC$, 平面 $PAC \perp$ 平面 PBC , 点 P, A, B 是定点, 则动点 C 的轨迹是()

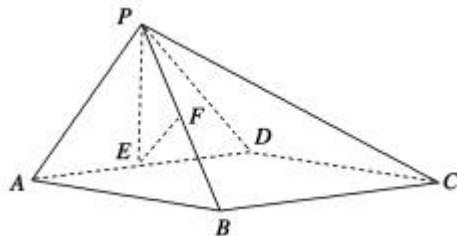
- A. 一条线段
B. 一条直线
C. 一个圆
D. 一个圆, 但要去掉两个点



【例三】如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, $PA=PD$, E, F 分别为 AD, PB 的中点.

(1) 求证: $PE \perp BC$;

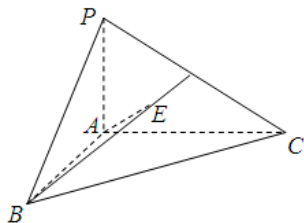
(2) 求证: 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD ;



【例四】已知, 如图, 平面 $PAB \perp$ 平面 ABC , 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC , $AE \perp$ 平面 PBC , E 为垂足.

(1) 求证: $PA \perp$ 平面 ABC ;

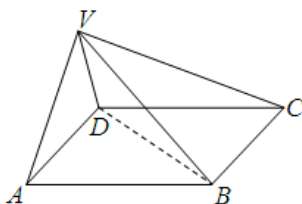
(2) 当 E 为 $\triangle PBC$ 的垂心时, 求证: $\triangle ABC$ 是直角三角形.



【例五】(全国卷) 如图, 在四棱锥 $V-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是正方形, 侧面 $VAD \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $\triangle VAD$ 是正三角形.

(1) 证明: $AB \perp$ 平面 VAD ;

(2) 求面 VAD 与 VDB 所成二面角的正切值.



必修第2册 第九章、统计

9.1.1 简单随机抽样

学习目标

1. 了解简单随机抽样的含义及其解决问题的过程。
2. 掌握两种简单随机抽样方法：抽签法和随机数法。
3. 会计算样本均值，理解样本与总体的关系。

重难点突破

统计学是通过收集数据和分析数据来认识未知现象的一门科学。而对于每一个具体的统计问题，首先要收集数据，那么如何收集数据呢？

★问题 1、全面调查和抽样调查有什么区别？

知识点 1 全面调查与抽样调查

调查方式	全面调查	抽样调查
定义	对每一个调查对象都进行 <u>调查</u> 的方法，称为全面调查，又称普查	根据一定目的，从总体中 <u>抽取一部分</u> 个体进行调查，并以此为依据对总体的情况作出估计和推断的调查方法
相关概念	总体：在一个调查中，我们把 <u>调查对象</u> 的全体称为总体。 个体：组成总体的每一个调查对象称为个体	样本：我们把从 <u>总体</u> 中抽取的那部分个体称为样本。 样本量：样本中包含的 <u>个体数</u> 称为样本量

★问题 2、什么是简单随机抽样？有哪几种方式？各自有什么特征？

知识点 2 简单随机抽样

放回简单随机抽样	不放回简单随机抽样
一般地，设一个总体含有 $N(N$ 为正整数) 个个体，从中 <u>逐个</u> <u>抽取</u> $n(1 \leq n < N)$ 个个体作为样本	
如果抽取是放回的，且每次抽取时总体内的各个个体被抽到的概率都 <u>相等</u> ，我们把这样的抽样方法叫做放回简单随机抽样	如果抽取是不放回的，且每次抽取时总体内 <u>未进入</u> <u>样本的各个个体</u> 被抽到的概率都相等，我们把这样的抽样方法叫做不放回简单随机抽样

单随机抽样

简单随机抽样：放回简单随机抽样和不放回简单随机抽样统称为简单随机抽样。通过简单随机抽样获得的样本称为简单随机样本

具体方法有：

(1) 抽签法：(编号→搅匀→不放回的逐个抽取)

(2) 随机数法：(定义：先把总体中的个体编号，用随机数根据产生与总体中个体数量相等的整数随机数，把产生的随机数作为抽中的编号，并剔除重复的编号，直到抽足样本所需要的个体数)

方式①、用计算器产生随机数

方式②、用 EXCEL 软件产生随机数

方式③、用统计软件 R 产生随机数

方式④、用随机数表产生随机数

★问题 3、抽签法与随机数法有哪些异同点？有什么要注意的地方？(下表：抽签法与随机数法的异同点)

相同点	①都属于简单随机抽样，并且要求被抽取样本的总体的个体数有限； ②都是从总体中逐个不放回地进行抽取
不同点	①抽签法比随机数法操作简单； ②随机数法更适用于总体中个体数较多的时候，而抽签法适用于总体中个体数较少的情况，所以当总体中的个体数较多时，应当选用随机数法，可以节约大量的人力和制作号签的成本

★问题 4、样本容量越大越好吗？如何利用样本来估计总体？

知识点 3 总体均值和样本均值

(1) 总体均值：一般地，总体中有 N 个个体，它们的变量值分别为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ，则称

$\bar{Y} = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}{N}$ 为总体均值，又称总体平均数。

(2) 总体均值加权平均数的形式：如果总体的 N 个变量值中，不同的值共有 k 个($k \leq N$)个，不妨记为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ ，其中 Y_i 出现的频数 $f_i(i=1, 2, \dots, k)$ ，则总体均值还可以写成加权平均数的形式

$\bar{Y} = \frac{Y_1 f_1 + Y_2 f_2 + \dots + Y_k f_k}{N}$

(3) 如果从总体中抽取一个容量为 n 的样本，它们的变量值分别为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，则称

$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$ 为样本均值, 又称样

本平均数. 在简单随机抽样中, 我们常用样本平均数 $\bar{y}$ 去估计总体平均数 $\bar{Y}$.

典例解析

【例一】(1) 关于简单随机抽样的特点有以下几种说法, 其中不正确的是 ()

- A. 要求总体中的个体数有限
- B. 从总体中逐个抽取
- C. 这是一种不放回抽样
- D. 每个个体被抽到的机会不一样, 与先后顺序有关

(2) 在简单随机抽样中, 某一个个体被抽到的可能性 ()

- A. 与第几次抽样有关, 第一次抽到的可能性最大
- B. 与第几次抽样有关, 第一次抽到的可能性最小
- C. 与第几次抽样无关, 每一次抽到的可能性相等
- D. 与第几次抽样无关, 与样本量也无关

(3) (多选题) 下列抽样方法是简单随机抽样的是 ()

- A. 在某年明信片销售活动中, 规定每 100 万张为一个开奖组, 通过随机抽取的方式确定号码的后四位为 2 709 的为三等奖
- B. 某车间包装一种产品, 在自动包装的传送带上, 每隔 30 分钟抽一包产品, 称其质量是否合格
- C. 某学校分别从行政人员、教师、后勤人员中各抽取 2 人, 调查他们对学校某项机构改革的意见
- D. 从 10 件产品中随机抽取 3 件进行质量检验
- E. 从 80 台笔记本电脑中一次性抽取 6 台电脑进行质量检查
- F. 一福彩彩民买 30 选 7 彩票时, 从装有 30 个大小、形状都相同的乒乓球的盒子(不透明)中逐个无放回地摸出 7 个有标号的乒乓球, 作为购买彩票的号码

【例二】(1) 为迎接 2022 年北京冬奥会, 奥委会现从报名的某高校 30 名志愿者中选取 6 人组成奥运志愿小组, 请用抽签法设计抽样方案.

(2) 某市质监局要检查某公司某个时间段生产的 500 克袋装牛奶的质量是否达标, 现从 500 袋牛奶中抽取 10 袋进行检验.

①利用随机数法抽取样本时, 应如何操作?

②如果用随机试验生成部分随机数如下所示, 据此写出应抽取的袋装牛奶的编号.

162,277,943,949,545,354,821,737,932,354,873,520,
964,384,263,491,648,642,175,331,572,455,068,877,047,4
47,672,172,065,025,834,216,337,663,013,785,916,955,56
7,199,810,507,175,128,673,580,667.

③质监局对该公司生产的袋装牛奶检验的质量指标有两个: 一是每袋牛奶的质量满足 $500 \pm 5g$, 二是 10 袋质量的平均数 $\geq 500g$, 同时满足这两个指标, 才认为公司生产的牛奶为合格, 否则为不合格. 经过检测得到 10 袋袋装牛奶的质量(单位: g)为:

502,500,499,497,503,499,501,500,498,499.

计算这个样本的平均数, 并按照以上标准判断牛奶质量是否合格.

【例三】(1) 总体由编号为 01,02, ..., 19,20 的 20 个个体组成, 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法: 从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右一次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 ()

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

A. 08 B. 07 C. 02 D. 01

(2) (2021·全国·高一专题练习) 某工厂利用随机数表对生产的 700 个零件进行抽样测试, 先将 700 个零件进行编号, 001,002, ..., 699,700. 从中抽取 70 个样本, 下图提供随机数表的第 4 行到第 6 行, 若从表中第 5 行第 6 列开始向右读取数据, 则得到的第 6 个样本编号是 ()

32 21 18 34 29 78 64 54 07 32 52 42 06 44 38 12 23
43 56 77 35 78 90 56 42
84 42 12 53 31 34 57 86 07 36 25 30 07 32 86 23 45
78 89 07 23 68 96 08 04
32 56 78 08 43 67 89 53 55 77 34 89 94 83 75 22 53
55 78 32 45 77 89 23 45

A. 623 B. 328 C. 253 D. 007

9.1.2-3 分层随机抽样、获取数据的途径

学习目标

1. 了解分层随机抽样的特点和适用范围,理解分层随机抽样的必要性,掌握各层样本量比例分配的方法.
2. 结合具体实例,掌握分层随机抽样的样本均值.
3. 知道获取数据的基本途径,包括:统计报表和年鉴、社会调查、试验设计、普查和抽样、互联网等.

重难点突破

抽样调查最核心的问题是样本的代表性,简单随机抽样是使总体中每一个个体都有相等的机会被抽中,但因为抽样的随机性,有可能出现比较“极端”的样本,如调查高一学生身高全抽中男生.

★问题 1、上述样本有代表性吗?如何避免这种情况发生?

【思考】对男生、女生分别进行简单随机抽样,样本量在男生、女生中应如何分配?

知识点 1 分层随机抽样

一般地,按一个或多个变量把总体划分成若干个子总体,每个个体属于且仅属于一个子总体,在每个子总体中独立地进行简单随机抽样,再把所有子总体中抽取的样本合在一起作为总样本,这样的抽样方法称为分层随机抽样.

(1)每一个子总体称为层,在分层随机抽样中,如果每层样本量都与层的大小成比例,那么称这种样本量的分配方式为比例分配.

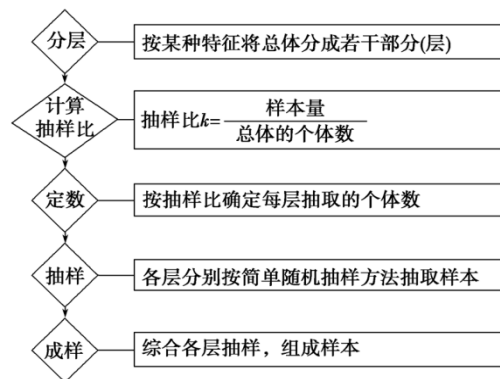
(2)如果总体分为 2 层,两层包含的个体数分别为 M, N , 两层抽取的样本量分别为 m, n , 两层的样本平均数分别为 $\bar{x}, \bar{y}$, 两层的总体平均数分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$, 总体平均数为 $\bar{W}$, 样本平均数为 $\bar{w}$.

$$\text{则 } \bar{w} = \frac{m}{m+n} \bar{x} + \frac{n}{m+n} \bar{y}$$

$$\bar{w} = \frac{M}{M+N} \bar{X} + \frac{N}{M+N} \bar{Y}$$

(3)在比例分配的分层随机抽样中,可以直接用样本平均数 $\bar{w}$ 估计总体平均数 $\bar{W}$.

知识点 2 分层随机抽样的步骤



★问题 2、简单随机抽样和分层随机抽样有什么区别和联系?

答: 区别: _____

联系: _____

★问题 3、获取数据有哪些好的途径呢?

知识点 3 获取数据的基本途径

获取数据的基本途径	适用类型	注意事项
通过调查获取数据	对于有限总体问题, 我们一般通过抽样调查或普查的方法获取数据	要充分有效地利用背景信息选择或创建更好的抽样方法, 并有效地避免抽样过程中的人为错误
通过试验获取数据	没有现存的数 据可以查询	严格控制实验环境, 通过精心的设计安排试验, 以提高数据质量
通过观察获取数据	自然现象	要通过长久的持续观察获取数据
通过查询获得数据	众多专家研究过, 其收集的数据有所存储	必须根据问题背景知识“清洗数据”, 去伪存真

【思考 1】: 利用统计报表和年鉴属于那中获取数据的途径?

【思考 2】: 要了解一种新型灯管的寿命, 能通过观察获取数据吗?

典例解析

【例一】(1) 下列问题中, 最适合用分层随机抽样抽取样本的是 ()

- A. 从 10 名同学中抽取 3 人参加座谈会
B. 某社区有 500 个家庭, 其中高收入的家庭 125 户, 中等收入的家庭 280 户, 低收入的家庭 95 户, 为了了解生活购买力的某项指标, 要从中抽取一个容量为 100 的样本
C. 从 1 000 名工人中, 抽取 100 人调查上班途中所用时间
D. 从生产流水线上, 抽取样本检查产品质量

(2) 某校有高一学生 400 人, 高二学生 380 人, 高三学生 220 人, 现教育局督导组欲用分层随机抽样的方法抽取 50 名学生进行问卷调查, 则下列判断正确的是 ()

- A. 高一学生被抽到的可能性最大
B. 高二学生被抽到的可能性最大
C. 高三学生被抽到的可能性最大
D. 每位学生被抽到的可能性相等

(3) 某单位有老年人 28 人、中年人 54 人、青年人 81 人, 为了调查他们的身体情况, 需从中抽取一个样本量为 36 的样本, 则下列抽样方法适合的是_____.

- ①简单随机抽样;
②直接运用分层随机抽样;
③先从老年人中剔除 1 人, 再用分层随机抽样.

(4) 某学校有在职人员 160 人, 其中行政人员有 16 人, 教师有 112 人, 后勤人员有 32 人. 教育部门为了了解在职人员对学校机构改革的意见, 要从中抽取一个容量为 20 的样本, 请利用分层随机抽样的方法抽取, 写出抽样过程.

【例二】(1) 为了研究近年来我国高等教育发展状况, 小明需要获取近年来我国大学生入学人数的相关数据, 他获取这些数据的途径最好是 ()

- A. 通过调查获取数据 B. 通过试验获取数据
C. 通过观察获取数据 D. 通过查询获得数据

(2) 下列哪些数据一般是通过试验获取的 ()

- A. 1988 年济南市的降雨量
B. 2019 年新生儿人口数量
C. 某学校高一年级同学的数学测试成绩
D. 某种特效中成药的配方

(3) “中国天眼”为 500 米口径球面射电望远镜(Five hundred meters Aperture Spherical Telescope, 简称 FAST), 是具有我国自主知识产权、世界最大单口径、最灵敏的射电望远镜. 建造“中国天眼”的目的是 ()

- A. 通过调查获取数据 B. 通过试验获取数据
C. 通过观察获取数据 D. 通过查询获得数据

【例三】(1) 交通管理部门为了解机动车驾驶员(简称驾驶员)对某新法规的知晓情况, 对甲、乙、丙、丁四个社区做分层随机抽样调查, 假设四个社区驾驶员的总人数为 N , 其中甲社区有驾驶员 96 人. 若在甲、乙、丙、丁四个社区抽取驾驶员的人数分别为 12, 21, 25, 43, 则这四个社区驾驶员的总人数 N 为 ()

- A. 101 B. 808 C. 1 212 D. 2 012

(2) 将一个总体分为 A, B, C 三层, 其个体数之比为 5:3:2, 若用分层随机抽样方法抽取容量为 100 的样本, 则应从 C 中抽取_____个个体.

(3) 分层随机抽样中, 总体共分为 2 层, 第 1 层的样本量为 20, 样本平均数为 3, 第 2 层的样本量为 30, 样本平均数为 8, 则该样本的平均数为_____.

(4) 为了了解某社区居民是否准备收看电视台直播的“龙舟大赛”, 某记者分别从社区 60~70 岁, 40~50 岁, 20~30 岁的三个年龄段中的 128, 192, x 人中, 采用分层随机抽样的方法共抽出了 30 人进行调查, 若 60~70 岁这个年龄段中抽查了 8 人, 那么 x 为 ()

- A. 64 B. 96 C. 144 D. 160

【例四】(1) 高一和高二两个年级的同学参加了数学竞赛, 高一年级有 450 人, 高二年级有 350 人, 通过分层随机抽样的方法抽取了 160 个样本, 得到两年级的竞赛成绩的平均数分别为 80 分和 90 分, 则:

- (1) 高一、高二抽取的样本量分别为_____;
(2) 高一和高二数学竞赛的平均分约为_____.

(2) 某学校高一年级在校人数为 600 人, 其中男生 320 人, 女生 280 人, 为了解学生身高发展情况, 按分层随机抽样的方法抽取 50 名男生身高为一个样本, 其样本平均数为 170.2 cm, 抽取 50 名女生身高为一个样本, 其样本平均数为 162.0 cm, 则该校高一学生的平均身高的估计值为_____.

9.2.1 总体取值规律的估计

9.2.2 总体百分位数的估计

学习目标

1. 能选择恰当的统计图表对数据进行可视化描述, 体会合理使用统计图表的重要性.
2. 结合实例, 能用样本估计总体的取值规律.
3. 学会计算样本百分位数, 会对总体百分位数做出合理估计.

重难点突破

★问题 1、如何画一个频率分布直方图？

知识点 1 画频率分布直方图的步骤

1. 求极差：极差是一组数据中 最大值 与 最小值 的差.
2. 决定组距与组数：当样本容量不超过 100 时，常分成 5~12 组，一般取等长组距，并且组距应力求“取整”.
3. 将数据分组.
4. 列频率分布表：一般分四列，即分组、频数、频率、累积频率. 其中频数合计应是样本容量，频率合计是 1.
5. 画频率分布直方图：横轴表示样本数据，纵轴表示 $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$. 小长方形的面积 $= \text{组距} \times \frac{\text{频率}}{\text{组距}} = \text{频率}$. 各小长方形的面积和等于 1.

★问题 2、从频率分布直方图中，你能得到哪些信息？

知识点 2 总体取值规律的估计

- (1) 从频率分布表可以看出，样本观测数据落在各个小组的比例大小，例如哪组最多，哪组最少.
- (2) 从频率分布直方图可以看出，样本的观测数据分布对称情况，左右高低情况，数据集中情况，从左到右的变化趋势等.

[思考] 还有其他统计的图表吗？各有什么特点？

知识点 3 其他统计图表

统计图表	主要应用
扇形图	直观描述各类数据占总数的比例
条形图和直方图	直观描述不同类别或分组数据的频数和频率
折线图	描述数据随时间的变化趋势

★问题 3、什么是百分位数？如何求解一组数据的百分位数？

知识点 4 百分位数

(1) 概念

一般地，一组数据的第 p 百分位数是这样-一个值，它使得这组数据中至少有 $p\%$ 的数据小于或等于这个值，且至少有 $(100-p)\%$ 的数据大于或等于这个值.

(2) 求解步骤

可以通过下面的步骤计算一组 n 个数据的第 p 百分位数：

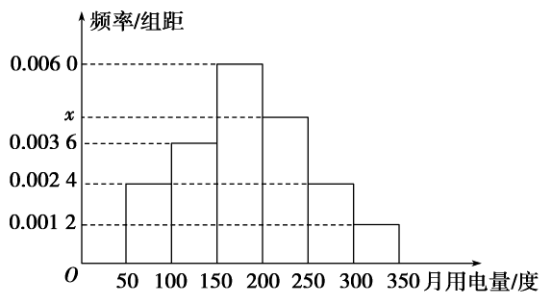
第 1 步，按从小到大排列原始数据.

第 2 步，计算 $i = n \times p\%$.

第 3 步，若 i 不是整数，而大于 i 的比邻整数为 j ，则第 p 百分位数为第 j 项数据；若 i 是整数，则第 p 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数.

典例解析

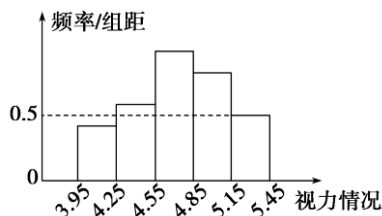
【例一】从某小区抽取 100 户居民进行月用电量调查，发现其用电量都在 50 至 350 度之间，频率分布直方图如图所示.



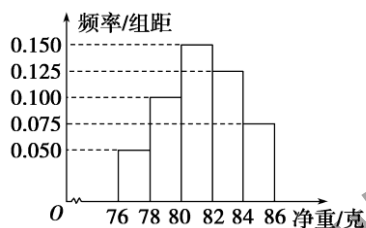
(1) 求直方图中 x 的值；

(2) 在这些用户中，求用电量落在区间 $[100, 250)$ 内的户数.

【例二】(1) 中小学生的视力状况受到社会的广泛关注. 某市有关部门从全市 6 万名高一学生中随机抽取 400 名学生, 对他们的视力状况进行一次调查统计, 将所得到的有关数据绘制成频率分布直方图, 如图. 从左至右五个小组的频率之比为 5:7:12:10:6, 则该市 6 万名高一学生中视力在 $[3.95, 4.25)$ 内的学生约有 _____ 人.

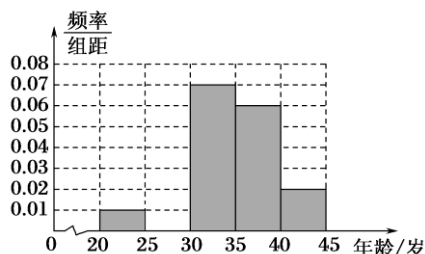


(2) 某厂对一批产品进行抽样检测, 如图是抽检产品净重(单位: 克)的频率分布直方图, 样本数据分组为 $[76, 78)$, $[78, 80)$, $\dots$, $[84, 86)$. 若这批产品有 120 个, 估计其中净重大于或等于 78 克且小于 84 克的产品的个数是 ()



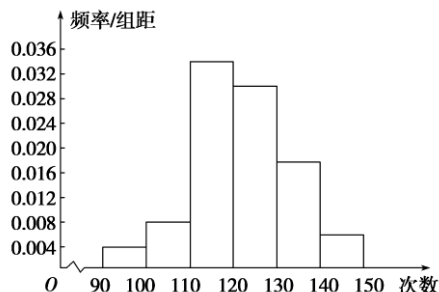
A. 12 B. 18 C. 25 D. 90

(3)(多选题) 为组织好“市运会”, 组委会征集了 800 名志愿者, 现对他们的年龄进行抽样统计后, 得到如图所示的频率分布直方图, 但是年龄在 $[25, 30)$ 内的数据不慎丢失. 则 ()



- A. 年龄在 $[25, 30)$ 内对应小长方形的高度为 0.04
 B. 年龄在 $[25, 30)$ 内对应小长方形的高度为 0.2
 C. 这 800 名志愿者中年龄在 $[25, 35)$ 内的人数为 400
 D. 这 800 名志愿者中年龄在 $[25, 35)$ 内的人数为 440

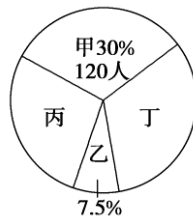
(4) 为了了解高一年级学生的体能情况, 某校抽取部分学生进行一分钟跳绳次数测试, 将所得数据整理后, 画出频率分布直方图(如图所示), 图中从左到右各小矩形的面积之比为 2:4:17:15:9:3, 第二小组的频数为 12.



(1) 第二小组的频率是多少? 样本量是多少?

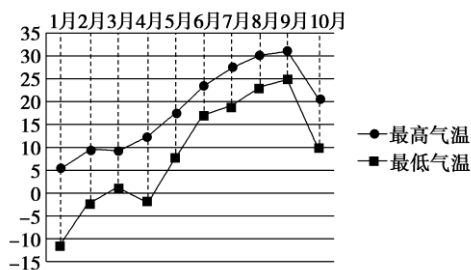
(2) 若次数在 110 以上(含 110 次)为达标, 则该校全体高一年级学生的达标率是多少?

【例三】(1) 如图是甲、乙、丙、丁四组人数的扇形统计图的部分结果, 根据扇形统计图的情况可以知道丙、丁两组人数和为 ()



- A. 250 B. 150
 C. 400 D. 300

(2) 某城市收集并整理了该市 2020 年 1 月份至 10 月份各月最低气温与最高气温(单位: $^{\circ}\text{C}$)的数据, 绘制了下面的折线图.



则根据折线图, 下列结论错误的是 ()

- A. 最高气温高于 25°C 的月份有 3 个
 B. 10 月的最高气温不低于 5 月的最高气温
 C. 月温差(最高气温减最低气温)的最大值出现在 1 月
 D. 最低气温低于 0°C 的月份有 4 个

9.2.3 总体集中趋势的估计

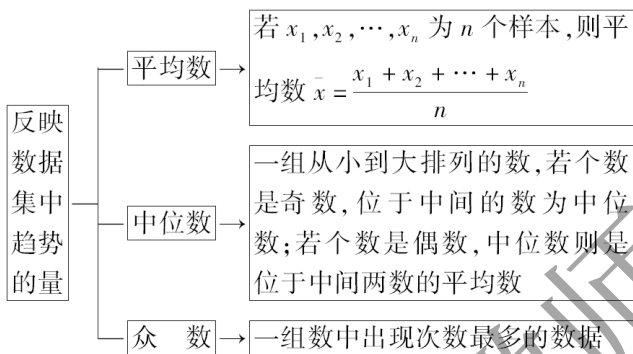
学习目标

1. 对比中位数, 感受百分位数的含义, 进一步体会四分位数的特征和价值.
2. 理解平均数、众数、中位数的定义, 会从已知数据中获得上述特征数值.
3. 基于具体的案例体会数据向均值集中的趋势.

重难点突破

★问题 1、什么是平均数、中位数和众数? 他们各有什么优缺点?

知识点 1 平均数、中位数和众数的定义



[知识解读] 1. 众数、中位数、平均数的理解

(1) 一组数据中, 某个数据出现的次数称为这个数据的频数, 出现次数最多的数据称为这组数据的众数.

说明: 如果有几个数据出现的次数相同, 并且比其他数据出现的次数都多, 那么这几个数据都是这组数据的众数; 若一组数据中, 每个数据出现的次数一样多, 则认为这组数据没有众数.

(2) 如果一组数有奇数个数, 且按照从小到大排列后为 $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$, 则称 x_{n+1} 为这组数的中位数; 如果一组数有偶数个数, 且按照从小到大排列后为 $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, 则称 $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ 为这组数的中位数.

(3) 如果给定的一组数是 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 则这组数的平均数为 $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$.

众数、中位数、平均数都是刻画“中心位置”的

量, 它们从不同角度刻画了一组数据的集中趋势.

2. 众数、中位数和平均数的比较

名称	优点	缺点
众数	体现了样本数据的最 大集中点	众数只能传递数据中的信息的很少一部分, 对极端值不敏感
中位数	不受少数几个极端数据(即排序靠前或靠后的数据)的影响	对极端值不敏感
平均数	与中位数相比, 平均数反映出样本数据中更多的信息, 对样本中的极端值更加敏感	任何一个数据的改变都会引起平均数的改变, 数据越“离群”, 对平均数的影响越大

★问题 2、在频率分布直方图中如何计算众数、中位数和平均数?

知识点 2 频率直方图中平均数、中位数和众数的计算

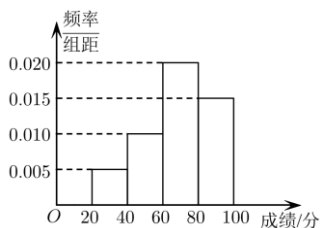
众数	取最高小长方形底边中点的横坐标作为众数
中位数	即 50% 分位数, 在频率分布直方图中, 把频率分布直方图划分为左右两个面积相等的部分的分界线与 x 轴交点的横坐标称为中位数
平均数	平均数是频率分布直方图的“重心”, 等于频率分布直方图中每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点的横坐标之和

【例一】(1) 已知一组数据: 125, 121, 123, 125, 127, 129, 125, 128, 130, 129, 126, 124, 125, 127, 126. 则这组数据的第 25 百分位数和第 80 百分位数分别是 ()

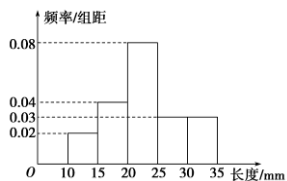
- A. 125 128 B. 124 128
C. 125 129 D. 125 128.5

(2) 某学校组织学生参加数学测试, 成绩的频率分布直方图如下, 数据的分组依次是 $[20, 40), [40, 60), [60, 80), [80, 100]$, 则可估计这次数学测试成绩的第

40 百分位数是_____.



(例一(2)图)



(例一(3)图)

(3) 某工厂对一批新产品的长度(单位: mm)进行检测, 如图是检测结果的频率分布直方图, 据此估计这批产品的中位数为 ()

- A. 20 B. 25 C. 22.5 D. 22.75

【例二】(1) (多选题) 在某次考试中, 10 名同学的得分如下: 84, 77, 84, 83, 68, 78, 70, 85, 79, 95, 则下列说法正确的是 ()

- A. 这组数据的众数是 84
B. 这组数据的众数是 85
C. 这组数据的平均数是 80.3
D. 这组数据的平均数是 80.4

(2) 已知一组数据按从小到大排列为 -1, 0, 4, x , 6, 15, 且这组数据的中位数是 5, 那么这组数据的众数是____, 平均数是_____.

(3) (2020·武汉期末) 已知一组数据为 20, 30, 40, 50, 50, 60, 70, 80, 则该组数据的平均数、中位数和众数的大小关系是

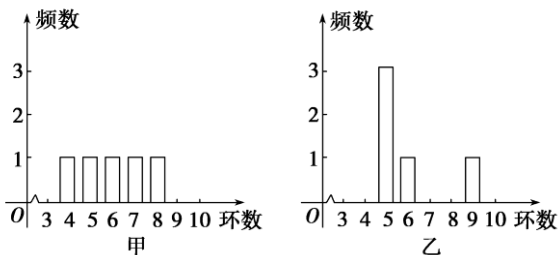
- A. 平均数 > 中位数 > 众数
B. 平均数 < 中位数 < 众数
C. 中位数 < 众数 < 平均数
D. 平均数 = 中位数 = 众数

(4) 某射击小组有 20 人, 教练将他们某次射击的数据绘制成如下表格, 则这组数据的众数和中位数分别是 ()

环数	5	6	7	8	9	10
人数	1	2	7	6	3	1

- A. 7, 7 B. 8, 7.5 C. 7, 7.5 D. 8, 6

(5) 甲、乙两人在一次射击比赛中各射靶 5 次, 两人成绩的条形统计图如图所示, 则 ()



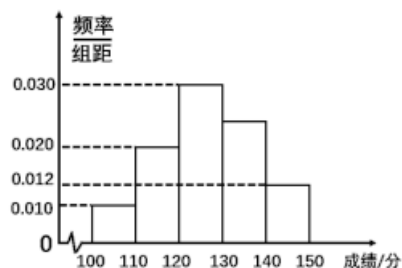
- A. 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数
B. 甲的成绩的中位数等于乙的成绩的中位数
C. 甲的成绩的第 80 百分位数等于乙的成绩的第 80 百分位数
D. 甲的成绩的极差大于乙的成绩的极差

【例三】(1) 下列判断正确的是 ()

- A. 样本平均数一定小于总体平均数
B. 样本平均数一定大于总体平均数
C. 样本平均数一定等于总体平均数
D. 样本量越大, 样本平均数越接近于总体平均数

(2) 某中学高一年级有 1000 名学生参加学情调研测试, 用简单随机抽样的方法抽取了一个容量为 50 的样本, 得到数学成绩的频率分布直方图如图所示:

- ①求第四个小矩形的高.
②求这 1000 名学生的数学成绩的众数、平均分、中位数.



【例四】(1) 一个样本按从小到大的顺序排列为 10, 12, 13, x , 17, 19, 21, 24, 其中位数为 16, 则 x = _____.

(2) (2022·山东济南·二模) 2022 年 4 月 24 日是第七个“中国航天日”, 今年的主题是“航天点亮梦想”. 某校组织学生参与航天知识竞答活动, 某班 8 位同学成绩如下: 7, 6, 8, 9, 8, 7, 10, m . 若去掉 m , 该组数据的第 25 百分位数保持不变, 则整数 m ($1 \leq m \leq 10$) 的值可以是_____ (写出一个满足条件的 m 值即可).

9.2.4 总体离散程度的估计

学习目标

1. 理解方差、标准差的含义，会计算方差和标准差.
2. 结合实例，能用样本估计总体的离散程度参数(标准差、方差、极差)，理解离散程度参数的统计含义.

重难点突破

★问题 1、方差和标准差如何计算？它们主要反映数据的什么特征？

知识点 1 一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差和标准差

数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的方差为 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 =$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$, 标准差为 $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$.

知识点 2 总体方差和标准差

(1)总体方差和标准差：如果总体中所有个体的变量值分别为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ ，总体的平均数为 $\bar{Y}$ ，则称 $S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2$ 为总体方差， $S = \sqrt{S^2}$ 为总体标准差.

(2)总体方差的加权形式：如果总体的 N 个变量值中，不同的值共有 $k(k \leq N)$ 个，不妨记为 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ ，其中 Y_i 出现的频数为 $f_i(i=1, 2, \dots, k)$ ，则总体方差为 $S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k f_i (Y_i - \bar{Y})^2$.

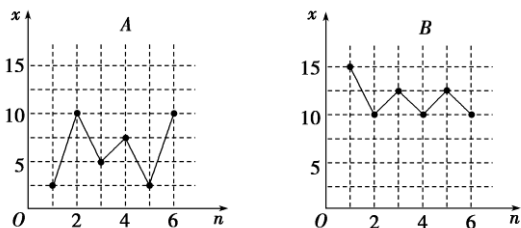
知识点 3 样本方差和标准差

如果一个样本中个体的变量值分别为 $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，样本平均数为 $\bar{y}$ ，则称 $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ 为样本方差. $s = \sqrt{s^2}$ 为样本标准差.

知识点 4 标准差的意义

标准差刻画了数据的 离散程度 或 波动幅度，标准差越大，数据的离散程度越 大；标准差越小，数据的离散程度越 小.

【小练习】1、如图所示，样本 A 和 B 分别取自两个不同的总体，它们的样本平均数分别为 $\bar{x}_A$ 和 $\bar{x}_B$ ，样本标准差分别为 s_A 和 s_B ，则 ()



- A. $\bar{x}_A > \bar{x}_B, s_A > s_B$ B. $\bar{x}_A < \bar{x}_B, s_A > s_B$
C. $\bar{x}_A > \bar{x}_B, s_A < s_B$ D. $\bar{x}_A < \bar{x}_B, s_A < s_B$

2、在去年的足球甲 A 联赛上，一队每场比赛平均失球数是 1.6，全年比赛失球个数的标准差为 1.2；二队每场比赛平均失球数是 2.2，全年比赛失球个数的标准差是 0.5. 下列说法正确的有 ()

- ①平均来说一队比二队防守技术好；
②二队比一队技术水平更稳定；
③一队有时表现很差，有时表现又非常好；
④二队很少不失球.

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

3、已知一组数据 1,3,2,5,4，那么这组数据的标准差为 _____.

【知识解读】对方差、标准差的理解

(1)标准差、方差描述了一组数据围绕平均数波动的大小. 标准差、方差越大，数据的离散程度越大；标准差、方差越小，数据的离散程度越小.

(2)标准差、方差的取值范围： $[0, +\infty)$.

标准差、方差为 0 时，样本各数据全相等，表明数据没有波动幅度，数据没有离散性.

(3)标准差的平方 s^2 称为方差，有时用方差代替标准差测量样本数据的离散程度. 方差与标准差的测量效果是一致的，在实际应用中一般多采用标准差.

(4)标准差的单位与样本数据一致.

【例一】(课本 P212 例 6) 在**中学高一年级学生身高的调查中, 采用样本量比例分配的分层随机抽样, 如果不知道样本数据, 只知道抽取了男生 23 人, 其平均数和方差分别为 $\bar{x}$ 和 s_x^2 , 抽取了女生 27 人, 其平均数和方差分别为 $\bar{y}$ 和 s_y^2 , 你能由这些数据计算出总样本的平均数 $\bar{z}$ 和方差 s_z^2 吗? (用含 $\bar{x}$ 、 s_x^2 、 $\bar{y}$ 、 s_y^2 式子表示)

解:

★问题 2、如何计算分层抽样的全体的方差?

知识点 5 分层随机抽样的方差

设样本容量为 n , 平均数为 $\bar{x}$, 其中两层的个体数量分别为 n_1, n_2 , 两层的平均数分别为 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, 方差分别为 s_1^2, s_2^2 , 则这个样本的方差为

$$s^2 = \frac{n_1}{n}[s_1^2 + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2] + \frac{n_2}{n}[s_2^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2].$$

【小练习】4、甲、乙两支田径队的体检结果为: 甲队体重的平均数为 60 kg, 方差为 200, 乙队体重的平均数为 70 kg, 方差为 300, 又已知甲、乙两队的队员人数之比为 1:4, 那么甲、乙两队全部队员的平均体重和方差分别是多少?

知识点 6 小结 (需记忆)

若数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 方差为 s^2 , 则:

(1) 新数据 $ax_1, ax_2, ax_3, \dots, ax_n$ 的平均数为_____,

方差为_____.

(2) 新数据 $x_1 + b, x_2 + b, x_3 + b, \dots, x_n + b$ 的平均数为_____, 方差为_____.

(3) 新数据 $ax_1 + b, ax_2 + b, ax_3 + b, \dots, ax_n + b$ 的平均数为_____, 方差为_____. 标准差为_____.

【例二】(1) 设样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均数和方差分别为 2 和 5, 若 $y_i = x_i + a$ (a 为非零实数, $i = 1, 2, \dots, 10$), 则 $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ 的平均数和方差分别为()

- A. 2, 5 B. $2 + a, 5$
C. $2 + a, 5 + a$ D. $2, 5 + a$

(2) 若样本 $x_1 + 1, x_2 + 1, \dots, x_n + 1$ 的平均数为 10, 其方差为 2, 则对于样本 $2x_1 + 2, 2x_2 + 2, \dots, 2x_n + 2$, 下列结论正确的是()

- A. 平均数为 20, 方差为 8
B. 平均数为 20, 方差为 10
C. 平均数为 21, 方差为 8
D. 平均数为 21, 方差为 10

(3) 若样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的标准差为 8, 则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的标准差为_____.

【例三】(1) 已知样本 9, 10, 11, x, y 的平均数是 10, 方差是 4, 则 $xy =$ _____.

(2) 已知样本数据 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的方差 $s^2 = \frac{1}{5}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - 80)$, 则样本数据 $2a_1 + 1, 2a_2 + 1, 2a_3 + 1, 2a_4 + 1, 2a_5 + 1$ 的平均数为_____.

(3) 若数据 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, 4, 6$ 的方差为 5, 则数据 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, 3, 7$ 的方差为_____.

(4) 若 40 个数据的平方和是 56, 平均数是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则这组数据的标准差是_____.

(5) 已知一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均值为 $\bar{x} = 5$, $s^2 = 32$, 删去一个数之后, 平均值没有改变, 方差比原来大 2, 则这组数据的个数 $n =$ _____.

必修第2册 第十章、概率

10.1.1 有限样本空间与随机事件

【学习目标】

1. 类比集合的有关概念来认识样本空间，类比集合与集合之间的关系来认识随机事件
2. 理解样本点和有限样本空间的含义，会用集合的方法来表示样本空间

【故事引入】 狄青征讨侬智高

北宋仁宗年间，西南蛮夷侬智高起兵作乱，大将狄青奉命征讨。出征之前，他召集将士说：“此次作战，前途未卜，只有老天知道结果。我这里有 100 枚铜钱，现在抛到地上，如果全部正面朝上，则表明天助我军，此战必胜。”言罢，便将铜钱抛出，100 枚铜钱居然全部正面朝上！

将士闻讯，欢声雷动、士气大振！宋军也势如破竹，最终全胜而归。

【思考】：宋军之所以战胜真的是因为那 100 枚铜钱所致吗？

研究某种随机现象的规律，首先要观察它所有可能的基本结果。

知识点 1 随机试验及样本空间

1. 随机试验的概念和特点

(1)随机试验：我们把对随机现象的实现和对它的观察称为随机试验，简称试验，常用字母 E 来表示。

★(2)随机试验的特点：

- ①试验可以在相同条件下_____进行；
- ②试验的所有可能结果是_____的，并且不止一个；
- ③每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但事先不能确定出现哪一个结果。

★问题 1：抛掷一颗骰子有多少种基本结果？抛掷两颗骰子有多少种基本结果？

知识点 2 样本点和样本空间

	定义	字母表示
样本点	我们把随机试验 E 的 <u>每个可能的基本结果</u> 称为样本点	用 w 表示样本点
样本空间	全体 <u>样本点</u> 的集合称为试验 E 的样本空间	用 Ω 表示样本空间
有限样本空间	如果一个随机试验有 n 个可能结果 $w_1, w_2, \dots, w_n$ ，则称样本空间 $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 为有限样本空间	$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$

【小练习】1、抛掷一颗骰子的试验有_____个样本点，抛掷两枚银币的样本空间 $\Omega =$ _____。

2、一个口袋内装有除颜色外完全相同的 5 个球，其中 3 个白球，2 个黑球，从中一次摸出 2 个球。

(1)一共有多少个样本点？

(2)写出“2 个球都是白球”这一事件的集合表示。

★问题 2：在体育彩票摇号实验中，摇出“球的号码为奇数”是随机事件吗？摇出“球的号码为 3 的倍数”是否也是随机事件？如果用集合的形式来表示他们，那么这些集合与样本空间有什么关系？

答：_____

知识点 3 三种事件的定义

随机事件	我们将样本空间 Ω 的_____称为随机事件，简称事件，并把只包含_____样本点的事件称为基本事件，随机事件一般用大写字母 $A, B, C, \dots$ 表示。在每次试验中，当且仅当 A 中某个样本点出现时，称为事件 A 发生
必然事件	Ω 作为自身的子集，包含了_____样本点，在每次试验中总有一个样本点发生，所以 Ω 总会发生，我们称 Ω 为必然事件

不可能事件	空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点,在每次试验中都不会发生,我们称 $\emptyset$ 为不可能事件
-------	--

注释: 1. 随机试验的三个特点

- (1) 试验可以在相同条件下重复进行;
- (2) 试验的所有可能结果是明确可知的, 并且不止一个;
- (3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个, 但事先不能确定出现哪一个结果.

2. 关于样本点和样本空间

(1) 样本点是指随机试验的每个可能的基本结果, 全体样本点的集合称为试验的样本空间;

(2) 只讨论样本空间为有限集的情况, 即有限样本空间.

3. 事件与基本事件

(1) 随机事件是样本空间的子集. 随机事件是由若干个基本事件构成的, 当然, 基本事件也是随机事件.

(2) 必然事件与不可能事件不具有随机性, 是随机事件的两个极端情形.

【例一】判断下列事件哪些是必然事件, 哪些是不可能事件, 哪些是随机事件?

- (1) “导体通电后, 发热”: ()
- (2) “抛出一块石块, 自由下落”: ()
- (3) “某人射击一次, 中靶”: ()
- (4) “在标准大气压下且温度低于 0°C 时, 冰自然融化”: ()
- (5) “方程 $x^2 + 1 = 0$ 有实数根”: ()
- (6) “如果 $a > b$, 那么 $a - b > 0$ ”: ()
- (7) “东边日出西边雨”: ()
- (8) “从标号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 张标签中, 得到 1 号签”. ()

【例二】(1) 一个家庭有两个小孩儿, 则可能的结果为()

- A. $\{(\text{男}, \text{女}), (\text{男}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$
- B. $\{(\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男})\}$
- C. $\{(\text{男}, \text{男}), (\text{男}, \text{女}), (\text{女}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$
- D. $\{(\text{男}, \text{男}), (\text{女}, \text{女})\}$

(2) 同时抛掷两枚大小相同的骰子, 用 (x, y) 表示结

果, 记 A 为“所得点数之和小于 5”, 则事件 A 包含的样本点的个数是()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

(3) 已知集合 $M = \{-2, 3\}$, $N = \{-4, 5, 6\}$, 从这两个集合中各取一个元素分别作为点的横、纵坐标.

(1) 写出这个试验的基本事件空间;

(2) 求这个试验的基本事件的总数.

【例三】如图, 一个电路中有 A、B、C 三个电器元件, 每个原件可能正常, 也可能失效. 把这个电路是否为通路看成是一个随机现象, 观察这个电路中各元件是否正常. (提示: 可用 1 表示“正常”, 0 表示“失效”)

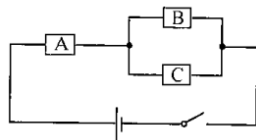
(1) 写出试验的样本空间;

(2) 用集合表示下列事件:

$M =$ “恰好两个元件正常”

$N =$ “电路是通路”

$T =$ “电路是断路”



【例四】(1) “一名同学一次掷出 3 枚骰子, 3 枚全是 6 点”的事件是()

- A. 不可能事件 B. 必然事件
- C. 可能性较大的随机事件
- D. 可能性较小的随机事件

(2) 在 25 件同类产品中, 有 2 件次品, 从中任取 3 件产品, 其中不是随机事件的是()

- A. 3 件都是正品 B. 至少有 1 件次品
- C. 3 件都是次品 D. 恰有 1 件正品

【例五】做抛掷红、蓝两枚骰子的试验, 用 (x, y) 表示结果, 其中 x 表示红色骰子出现的点数, y 表示蓝色骰子出现的点数. 写出:

(1) 这个试验的样本空间;

(2) 这个试验的结果的个数;

(3) 指出事件 $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ 的含义;

(4)写出“点数之和大于 8”这一事件的集合表示.

注：两个相等的事件总是同时发生或同时不发生.

10.1.2 事件的关系和运算

【学习目标】

1. 正确理解事件的包含、并事件、交事件、相等事件，以及互斥事件、对立事件的概念，掌握概率的基本性质
2. 掌握两个互斥事件的概率加法公式，知道对立事件的公式，会用公式进行简单的概率计算
3. 正确理解和事件与积事件，以及互斥事件与对立事件的区别与联系

【问题引入】在掷骰子的试验中，我们可以定义许多事件，如：

$C_1 = \{\text{出现 1 点}\}$ ； $C_2 = \{\text{出现 2 点}\}$ ； $C_3 = \{\text{出现 3 点}\}$ ；

$C_4 = \{\text{出现 4 点}\}$ ； $C_5 = \{\text{出现 5 点}\}$ ； $C_6 = \{\text{出现 6 点}\}$ ；

$D_1 = \{\text{出现的点数不大于 1}\}$ ；

$D_2 = \{\text{出现的点数大于 3}\}$ ；

$D_3 = \{\text{出现的点数小于 5}\}$ ；

$D_4 = \{\text{出现的点数大于等于 3}\}$ ；

$E = \{\text{出现的点数小于 7}\}$ ；

$F = \{\text{出现的点数大于 6}\}$ ；

$G = \{\text{出现的点数为偶数}\}$ ；

$H = \{\text{出现的点数为奇数}\}$ ；

.....

类比集合与集合的关系、运算，你能发现事件之间的关系与运算吗？

★问题 1：上述事件中 C_1 至 D_3 这 2 个事件之间是什么关系？它们各自发生的概率是多少？

答：_____

对于事件 A 与事件 B，如果事件 A 发生，则事件 B 一定发生，这时称事件 B 包含事件 A（或称事件 A 包含于事件 B），记作_____

注：不可能事件记作_____，任何事件都包含不可能事件

★问题 2：事件 C_1 和事件 D_1 之间是什么关系？它们各自发生的概率是多少？

答：_____

一般地，若 $B \supseteq A$ ，且 $A \supseteq B$ ，那么称事件 A 与事件 B 相等，记作_____

★问题 3：事件 $J = \{\text{出现 1 点或 5 点}\}$ 可以看成哪些事件的并事件？这些事件发生的概率和 J 发生的概率有什么联系？

答：_____

若某事件发生当且仅当事件 A 或事件 B 发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的并事件（或和事件），记作_____

★问题 4：事件 D_2 和事件 D_3 的交事件是哪个？它们各自的概率是多少？

答：_____

若某事件发生当且仅当事件 A 发生且事件 B 发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件），记作_____

★问题 5：事件 C_1 和 C_3 之间有什么关系？在上述事件中还有哪些事件之间也满足这种关系？它们并事件的概率是多少？

答：_____

若 $A \cap B$ 为不可能事件（ $A \cap B = \emptyset$ ）那么称事件 A 与事件 B 互斥.

注：若事件 A 与事件 B 互斥时：

- (1) 事件 A 与事件 B 在任何一次试验中不会同时发生；
- (2) 两事件同时发生的概率为 0.

★问题 6：事件 G 和 H 之间有什么关系？在上述事件中还有哪些事件之间也满足这种关系？

它们各自发生的概率是多少？之间有什么关系？

答：_____

若 $A \cap B$ 为不可能事件， $A \cup B$ 为必然事件，那么事件 A 与事件 B 互为对立事件。

注：(1) 事件 A 与事件 B 在任何一次试验中有且仅有一个发生；

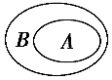
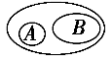
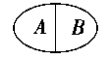
(2) 事件 A 的对立事件记为_____；

(3) 对立事件一定是互斥事件，但互斥事件不一定是对立事件。

★问题 7: 对立事件和互斥事件有什么异同点?

答: _____.

归纳填表:

实例	事件 关系	符号 表示	图形表示	类比集 合关系
C1 和 D3				
C1 和 D1				
C1、C5 和 $J = \{\text{出现 1 点或 5 点}\}$				
D2、D3 和 C4				
C1 和 C3 (或 D1 和 D2)				
G 和 H (或 D2 和 D4)				

【例一】判断下列给出的每对事件, 是否为互斥事件, 是否为对立事件, 并说明理由。

从 40 张扑克牌(红桃、黑桃、方块、梅花点数从 1~10 各 10 张)中, 任取一张。

- (1) “抽出红桃”与“抽出黑桃”;
- (2) “抽出红色牌”与“抽出黑色牌”;
- (3) “抽出的牌点数为 5 的倍数”与“抽出的牌点数大于 9”;

【例二】(1) 一个人打靶时连续射击两次, 事件“至多有一次中靶”的互斥事件是()

- A. 两次都中靶 B. 至少有一次中靶
C. 两次都不中靶 D. 只有一次中靶

(2) 一个人连续射击三次, 则事件“至少击中两次”的对立事件是()

- A. 恰有一次击中 B. 三次都没击中
C. 三次都击中 D. 至多击中一次

(3) 进行抛掷一枚骰子的试验, 有下列各组事件:

- (1) “出现 1 点”与“出现 2 点”;
 - (2) “出现奇数点”与“出现偶数点”;
 - (3) “出现大于 3 的点”与“出现大于 4 的点”.
- 其中是对立事件的组数是()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(4) (多选题) 从装有 5 个红球和 3 个白球的口袋内任

取 3 个球, 那么互斥而不对立的事件是 ()

- A. 至少有 1 个红球与都是红球
B. 至少有 2 个红球与都是白球
C. 至少有 1 个红球与至少有 1 个白球
D. 恰有 1 个红球与恰有 2 个红球

★问题 8: 请归纳出概率的基本性质:

概率基本性质 1: 概率 $P(A)$ 的取值范围

- (1) _____
- (2) _____
- (3) _____
- (4) _____

★问题 9: 什么情况下两个事件 A 与 B 的并事件发生的概率, 会等于事件 A 与事件 B 各自发生的概率之和?

【引导思考 1】: 掷一枚骰子, 事件 $C1$ {出现 1 点}, 事件 $C3$ {出现 3 点} 则事件 $C1 \cup C3$ 发生的频率与事件 $C1$ 和事件 $C3$ 发生的频率之间有什么关系?

结论: _____

概率基本性质 2: 概率的加法公式

如果事件 A 与事件 B 互斥, 则 _____

概率基本性质 3: 对立事件的概率公式

若事件 A, B 为对立事件, 则 _____

★问题 10: 任意两个事件的并事件的概率值如何求解?

【例三】 如果从不包括大小王的 52 张扑克牌中随机抽取一张, 那么取到红心 (事件 A) 的概率是 $\frac{1}{4}$, 取

到方片 (事件 B) 的概率是 $\frac{1}{4}$. 问:

- (1) 取到红色牌 (事件 C) 的概率是多少?
- (2) 取到黑色牌 (事件 D) 的概率是多少?

10.1.3 等可能事件的概率——古典概型

【学习目标】

1. 理解等可能事件（基本事件）的概念及古典概型的概率计算公式
2. 能够准确计算古典概率模型下的概率问题

【问题引入】

求一个事件发生的概率一般通过大量试验，统计频率去估计概率，但工作量太大，结果有摆动性，有的还具有破坏性。因此，除了通过大量的试验，有无其他方法对一个随机事件的可能性的进行估计？

【引导思考】：随机事件的概率能直接计算吗？什么样的随机事件的概率可以直接计算得来？

如抛掷一枚硬币会出现_____种等可能的结果，所以出现正面的概率是_____；有 10 个型号相同的杯子，其中一等品 6 个，二等品 3 个，三等品 1 个，则从中任取一个，会出现_____种等可能的结果，所以取到一等品的概率是_____，取到二等品的概率是_____，取到三等品的概率是_____。

注：一次试验中可能出现的每一个基本结果称为基本事件。

★问题 1：上面两个例子的所有基本事件之间有什么特点？

答：_____

我们将具有以下两个特点的概率模型称为古典概型。

- (1) 试验中所有可能出现的基本事件只有_____个；
- (2) 每个基本事件出现的可能性_____。

★问题 2：在古典概型下，如果所有基本事件共有 n 个，那每个基本事件出现的概率是多少？随机事件出现的概率如何计算？

古典概型的概率公式：

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$$

【思考】：抛两枚硬币出现的所有基本事件的总数是多少？

★问题 3：如何计算所有基本事件的总数呢？

【例一】从字母 a, b, c, d 中任意取出两个不同字母的试验中，共有几个基本事件？选中字母 d 的概率是多少？

★问题 4：如图，向一个圆面内随机地投射一个点，如果该点落在圆内任意一点都是等可能的，你认为这是古典概型吗？为什么？

★问题 5：如图，某同学随机地向一靶心进行射击，这一试验的结果只有有限个：命中 10 环、命中 9 环……命中 5 环和不中环。你认为这是古典概型吗？为什么？

★问题 6：在使用古典概型的概率公式时，应该注意什么？

答：_____

在使用古典概型的概率公式时，应该注意：

- (1) 要判断该概率模型是不是古典概型；
- (2) 要准确找出随机事件 A 包含的基本事件的个数和试验中基本事件的总数。

【例二】同时掷两个骰子，计算：

(1) 一共有多少种不同的结果？

(2) 其中向上的点数之和是 5 的结果有多少种？

(3) 向上的点数之和是 5 的概率是多少?

【思考】: 为什么要把两个骰子标上记号? 如果不标记号会出现什么情况? 你能解释其中的原因吗?

【引导思考】: 如果不标上记号, 类似于 (1, 2) 和 (2, 1) 的结果将没有区别. 这时, 所有可能的结果将是:

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 4) (4, 5) (4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 6) 共有 21 种, 和是 5 的结果有 2 个, 它们是 (1, 4) (2, 3), 所求的概率为:

那么, 你认为上面的分析过程对吗? 为什么?

【例三】将一个骰子先后抛掷 2 次, 观察向上的点数. 问:

(1) 两数之和是 3 的倍数的概率是多少?

(2) 两数之和不低于 10 的概率是多少?

【变式一】: (3) 点数之和为质数的概率为多少?

【变式二】: (4) 点数之和为多少时, 概率最大且概率是多少?

【变式三】: (5) 如果抛掷三次, 问抛掷三次的点数都是偶数的概率, 以及抛掷三次得点数之和等于 16 的概率分别是多少?

【例四】在 100 件产品中, 有 95 件合格品, 5 件次品. 从中任取 2 件, 计算:

(1) 2 件都是合格品的概率;

(2) 2 件都是次品的概率;

(3) 1 件是合格品、1 件是次品的概率.

【例五】

(1) 一个口袋装有大小相同的 5 只球, 其中 3 只白球, 2 个黑球. 若从中摸出 2 个球, 有多少个基本事件? 摸出两只白球的概率是多少?

(2) 某号码锁有 6 个拨盘, 每个拨盘上有从 0 到 9 共十个数字. 当 6 个拨盘上的数字组成某一个六位数字号码 (开锁号码) 时, 锁才能打开, 如果不知道开锁号码, 试开一次就把锁打开的概率是多少?

(3) 一个口袋内装有大小相等的 1 个白球和已编有不同号码的 3 个黑球, 从中摸出 2 个球.

(1) 共有多少种不同的结果?

(2) 摸出 2 个黑球有多少种不同的结果?

(3) 摸出 2 个黑球的概率是多少?

(4) 一个口袋内装有大小相同的 5 个红球和 3 个黄球, 从中一次摸出两个球.

(1) 问共有多少个基本事件;

(2) 求摸出两个球都是红球的概率;

(3) 求摸出的两个球都是黄球的概率;

(4) 求摸出的两个球一红一黄的概率.

10.1.4 概率的基本性质

【学习目标】

1. 熟练掌握性质 1, 性质 2.
2. 会判断两个事件的互斥与对立关系, 能够利用性质 3(互斥事件的概率公式), 性质 4(对立事件的概率公式) 求解概率问题
3. 掌握容斥原理, 能够解决实际生活中的概率问题.

知识点 概率的基本性质

性质 1 对任意的事件 A , 都有_____.

性质 2 必然事件的概率为 1, 不可能事件的概率为 0, 即 $P(\Omega) = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(\emptyset) = \underline{\hspace{2cm}}$.

性质 3 如果事件 A 和事件 B 互斥, 那么 $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

性质 4 如果事件 A 与事件 B 互为对立事件, 那么 $P(B) = \underline{\hspace{2cm}}$, $P(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

性质 5 如果 $A \subseteq B$, 那么 $P(A) \underline{\hspace{2cm}} P(B)$.

性质 6 设 A, B 是一个随机试验中的两个事件, 我们有 $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

[知识解读] 1. 概率的加法公式

(1) 当 A 与 B 互斥(即 $AB = \emptyset$)时, 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, 这称为互斥事件的概率加法公式.

(2) 一般地, 如果 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 是两两互斥的事件, 则 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m)$.

(3) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

2. 求复杂事件的概率通常有两种方法

(1) 将所求事件转化成彼此互斥事件的并事件;

(2) 先求其对立事件的概率, 再求所求事件的概率. (正难则反)

(小练习: 课本 P242)

【例一】(1) 某人射击一次, 设事件 A 为“击中环数小于 4”, 事件 B 为“击中环数大于 4”, 事件 C 为“击中环数不小于 4”, 事件 D 为“击中环数大于 0 且小

于 4”, 则正确的关系是()

- A. A 与 B 为对立事件 B. B 与 C 为互斥事件
C. C 与 D 为对立事件 D. B 与 D 为互斥事件

(2) 抛掷一个骰子, 观察出现的点, 设事件 A 为“出现 1 点”, B 为“出现 2 点”. 已知 $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$, 则出现 1 点或 2 点的概率为_____.

(3) 盒子里装有 6 只红球, 4 只白球, 从中任取 3 只球. 设事件 A 表示“3 只球中有 1 只红球, 2 只白球”, 事件 B 表示“3 只球中有 2 只红球, 1 只白球”. 已知 $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, 则这 3 只球中既有红球又有白球的概率为_____.

【例二】(1) 投掷一枚质地均匀的骰子, 向上的一面出现 1 点, 2 点, 3 点, 4 点, 5 点, 6 点的概率都是 $\frac{1}{6}$, 记事件 A 为“出现奇数点”, 事件 B “向上的点数不超过 3”, 则 $P(A \cup B) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 甲、乙两人各射击一次, 命中率分别为 0.8 和 0.5, 两人都命中的概率为 0.4, 则甲、乙两人至少有一人命中的概率为_____.

(3) 如果从不包括大小王的 52 张扑克牌中随机抽取一张, 那么抽取到红心(事件 A)的概率是 $\frac{1}{4}$, 取到方块(事件 B)的概率是 $\frac{1}{4}$, 求取到黑色牌(事件 D)的概率.

(4) 甲、乙、丙、丁四人参加 4×100 米接力赛, 求甲跑第一棒或乙跑第四棒的概率.

【例三】(1) 从分别写有 A, B, C, D, E 的 5 张卡片中任取 2 张, 这 2 张卡片上的字母按字母顺序恰好是相邻的概率为()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{7}{10}$

(2) 某家庭电话, 打进的电话响第一声时被接的概率

为 $\frac{1}{10}$ ，响第二声时被接的概率为 $\frac{3}{10}$ ，响第三声时被接的概率为 $\frac{2}{5}$ ，响第四声时被接的概率为 $\frac{1}{10}$ ；则电话在响前四声内被接的概率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{9}{10}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{4}{5}$

(3) 中国乒乓球队甲、乙两名队员参加奥运会乒乓球女子单打比赛，甲夺得冠军的概率为 $\frac{3}{7}$ ，乙夺得冠军的概率为 $\frac{1}{4}$ ，那么中国队夺得乒乓球单打冠军的概率为_____.

(4) 某产品分为优质品、合格品、次品三个等级，生产过程中出现合格品的概率为0.25，出现次品的概率为0.03，在该产品中任抽一件，则抽到优质品的概率为_____.

(5) A, B, C 三人同时参加一场活动，活动前 A, B, C 三人都把手机放在了 A 的包里. 活动结束后 B, C 两人去拿手机，发现三人手机外观看上去都一样，于是这两人每人随机拿出一部，则这两人中只有一人拿到自己手机的概率是()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

(6) 在一次教师联欢会上，到会的女教师比男教师多12人，从这些教师中随机挑选1人表演节目，若选到男教师的概率为 $\frac{9}{20}$ ，则参加联欢会的教师共有_____人.

(7) 甲、乙两人参加普法知识竞赛，共有5道不同的题目，其中3道选择题，2道填空题，甲、乙两人依次抽取1道题. 则甲抽到选择题、乙抽到填空题的概率为_____.

【例四】(1) (多选题)在一次随机试验中，三个事件 A_1, A_2, A_3 发生的概率分别是0.2, 0.3, 0.5，则下列说法错误的是()

- A. $A_1 \cup A_2$ 与 A_3 是互斥事件，也是对立事件
B. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 是必然事件
C. $P(A_2 \cup A_3) = 0.8$
D. $P(A_1 \cup A_2) \leq 0.5$

(2) (多选题)袋子里有4个大小、质地完全相同的球，其中有2个红球、2个白球，从中不放回地依次随机摸出2个球，事件 A = “两个球颜色相同”，事件 B = “两个球颜色不同”，事件 C = “第二次摸到红球”，事件 D = “两个球都是红球”. 下列说法正确的是()

- A. $P(A \cup B) = 1$ B. C 与 D 互斥
C. $D \subseteq C$ D. $P(B) = P(C) + P(D)$

(3) 已知从某班学生中任选两人参加农场劳动，选中两人都是男生的概率是 $\frac{1}{3}$ ，选中两人都是女生的概率是 $\frac{2}{15}$ ，则选中两人中恰有一人是女生的概率为_____.

【例五】(1) 若随机事件 A, B 互斥， A, B 发生的概率均不等于0，且 $P(A) = 2 - a$ ， $P(B) = 4a - 5$ ，则实数 a 的取值范围是()

- A. $\left(\frac{5}{4}, 2\right)$ B. $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$ C. $\left(\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right)$ D. $\left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right]$

(2) 从一箱产品中随机地抽取一件，设事件 A = {抽到一等品}，事件 B = {抽到二等品}，事件 C = {抽到三等品}，且已知 $P(A) = 0.65$ ， $P(B) = 0.2$ ， $P(C) = 0.1$ ，则事件“抽到的产品不是一等品”的概率为()

- A. 0.2 B. 0.35 C. 0.5 D. 0.4

(3) 盘子里有肉馅、素馅和豆沙馅的包子共10个，从中随机取出1个，若是肉馅包子的概率为 $\frac{2}{5}$ ，不是豆沙馅包子的概率为 $\frac{7}{10}$ ，则素馅包子的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(4) 口袋中装有编号为①、②的2个红球和编号为①、②、③、④、⑤的5个黑球，小球除颜色、编号外形大小完全相同，现从中取出1个小球，记事件 A 为“取到的小球的编号为②”，事件 B 为“取到的小球是黑球”，则下列说法正确的是()

- A. A 与 B 互斥 B. A 与 B 对立
C. $P(A + B) = \frac{6}{7}$ D. $P(AB) = \frac{6}{7}$

10.2 事件的相互独立性

【学习目标】

1. 弄清相互独立事件的概念与意义,能够利用相互独立事件的概率公式求解简单的概率问题.
2. 能区分两个事件相互独立与两个事件互斥这两个概念.
3. 学会并掌握如何用事件的独立性计算随机事件的概率.

问题引入:

【思考1】. 甲盒子里有3个白球和2个黑球,乙盒子里有2个白球和2个黑球,记 A =从甲盒子里摸出1个球,得到白球; B =从乙盒子里摸出1个球,得到白球,试问事件 A 是否发生会影响事件 B 发生的概率大小吗?(即 $P(B)=P(B|A)$ 吗?)

【思考2】. 盒中有5个球(3白两黑),每次取出一个,有放回地取两次,记 A =第一次抽取取到白球, B =第二次抽取取到白球. 试问事件 A 是否发生会影响事件 B 发生的概率大小吗?(即 $P(B)=P(B|A)$ 吗?) 如果是不放回呢?

知识点1 相互独立事件的定义

对任意两个事件 A 与 B ,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$ 成立,则称事件 A 与事件 B 相互独立,简称为独立.

注: A 与 B 相互独立即“事件 A 是否发生对事件 B 发生的概率没有影响”

知识点2 相互独立事件的性质

当事件 A, B 相互独立时,则事件 $\underline{A}$ 与事件 $\underline{\bar{B}}$ 相互独立,事件 $\underline{\bar{A}}$ 与事件 $\underline{B}$ 相互独立,事件 $\underline{\bar{A}}$ 与事件 $\underline{\bar{B}}$ 相互独立.

【知识解读】 1. 公式的推广

如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立,那么这 n 个事件同时发生的概率等于每个事件发生的概率的积,即 $P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n)$.

2. 两个事件独立与互斥的区别

两个事件互斥是指两个事件不可能同时发生;两个事件相互独立是指一个事件的发生与否对另一事件发生的概率没有影响.

一般地,两个事件不可能既互斥又相互独立,因为互斥事件不可能同时发生,而相互独立事件是以它们能够同时发生为前提.

用数学符号语言表示下列关系:

一般地,已知两个事件 A, B ,它们的概率分别为 $P(A), P(B)$,那么:

- (1) A, B 中至少有一个发生为事件_____;
- (2) A, B 都发生为事件_____;
- (3) A, B 都不发生为事件_____;
- (4) A, B 恰有一个发生为事件_____.
- (5) A, B 中至多有一个发生为事件_____.

它们之间的概率关系如表所示:

3. 相互独立事件与互斥事件的概率计算

概率	A, B 互斥	A, B 相互独立
$P(A \cup B)$	$P(A) + P(B)$	$1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$
$P(AB)$	0	$P(A)P(B)$
$P(\bar{A}\bar{B})$	$1 - [P(A) + P(B)]$	$P(\bar{A})P(\bar{B})$
$P(A\bar{B} \cup \bar{A}B)$	$P(A) + P(B)$	$P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B)$

说明:① $(A\bar{B}) \cup (\bar{A}B)$,表示的是 $A\bar{B}$ 与 $\bar{A}B$ 的和,实际意义是: A 发生且 B 不发生,或者 A 不发生且 B 发生,换句话说就是 A 与 B 中恰有一个发生.

②同数的加、减、乘、除混合运算一样,事件的混合运算也有优先级,我们规定:求积运算的优先级高于求和运算,因此 $(A\bar{B}) \cup (\bar{A}B)$ 可简写为 $A\bar{B} \cup \bar{A}B$.

【练习1】①袋中有三个红球,两个白球,采取不放回的取球.求下面事件的概率:

事件 A :第一次从中任取一个球是白球.

事件 B :第二次从中任取一个球是白球.

②袋中有三个红球，两个白球，采取有放回的取球. 求下面事件的概率：

事件 A：第一次从中任取一个球是白球.

事件 B：第二次从中任取一个球是白球.

【练习 2】某产品的制作需三道工序，设这三道工序出现次品的概率分别是 P_1, P_2, P_3 . 假设三道工序互不影响，则制作出来的产品是正品的概率是_____。

【练习 3】掷一枚正方体骰子一次，设事件 A：“出现偶数点”，事件 B：“出现 3 点或 6 点”，则事件 A, B 的关系是(B)

- A. 互斥但不相互独立 B. 相互独立但不互斥
C. 互斥且相互独立
D. 既不相互独立也不互斥

【例一】下列每对事件中，哪些是互斥事件，哪些是相互独立事件？

(1) 1 000 张有奖销售的奖券中某张奖券是一等奖与该张奖券是二等奖；()

(2) 甲、乙两人同时购买同一期的双色球彩票各一张，甲中奖与乙中奖；()

(3) 甲组 3 名男生、2 名女生，乙组 2 名男生、3 名女生，现从甲、乙两组中各选 1 名同学参加演讲比赛，“从甲组中选出 1 名男生”与“从乙组中选出 1 名女生”；()

(4) 容器内盛有 5 个白球和 3 个黄球，“从 8 个球中任意取出 1 个，取出的是白球”与“从剩下的 7 个球中任意取出 1 个，取出的还是白球”。()

【例二】甲、乙、丙 3 位大学生同时应聘某个用人单位的职位，3 人能被选中的概率分别为 $\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ ，且各自能否被选中互不影响。

(1) 求 3 人同时被选中的概率；

(2) 求 3 人中至少有 1 人被选中的概率；

(3) 求 3 人均未被选中的概率。

【例三】(1) 在一段线路中并联着 3 个自动控制的常开开关，只要其中 1 个开关能够闭合，线路就能正常工作。假定在某段时间内每个开关能够闭合的概率都是 0.7，计算在这段时间内线路正常工作的概率。

(2) 三个元件 T_1, T_2, T_3 正常工作的概率分别为 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}$ ，将它们中某两个元件并联后再和第三个元件串联接入电路，它们是否正常工作相互独立。在如图所示的电路中，电路不发生故障的概率是多少？

【例四】(1) 甲投篮的命中率为 0.8，乙投篮的命中率为 0.7，每人投 3 次，两人恰好都命中 2 次的概率是多少？

(2) 甲乙两地都位于长江下游，根据一百多年的气象记录，知道甲乙两地一年中雨天所占的比例分别为 20%

和 18%，两地同时下雨的比例为 12%，问：

(1) 乙地为雨天时甲地也为雨天的概率是多少？

(2) 甲地为雨天时乙地也为雨天的概率是多少？

(3) 甲乙两市至少一市下雨的概率是多少？

【例五】甲、乙两人进行围棋比赛，比赛要求双方下满五盘棋，开始时甲每盘棋赢的概率为 $\frac{3}{4}$ ，由于心态不稳，甲一旦输一盘棋，他随后每盘棋赢的概率就变为 $\frac{1}{2}$ 。假设比赛没有和棋，且已知前两盘棋都是甲赢。

(1) 求第四盘棋甲赢的概率；

(2) 求比赛结束时，甲恰好赢三盘棋的概率。

10.3 频率与概率

【学习目标】

1. 了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性, 感受随着次数增加频率趋于稳定的特点
2. 理解概率的意义及频率与概率的区别, 利用概率知识正确求解现实生活中的实际问题
3. 能够利用古典概型或蒙特卡洛法进行求解概率.

◆**频数与频率**: 在相同的条件 S 下重复 n 次试验, 观察某一事件 A 是否出现, 称 n 次试验中事件 A 出现的次数 n_A 为事件 A 出现的_____ ; 称事件 A 出现的比例 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的频率.

★**问题 1**: 人们经过长期的实践并深入研究后, 发现随机事件虽然就每次试验结果来说具有不确定性, 然而在大量重复试验中, 它却呈现出一种完全确定的规律性. 你是如何理解这种规律性的呢?

◆利用计算机模拟掷硬币试验对比研究, 探讨“正面朝上”的规律性

总计数	正面次数	反面次数	正面频率	反面频率
100	44	56	0.44	0.56
200	84	116	0.42	0.58
300	125	175	0.4167	0.5833
500	248	252	0.496	0.504
800	398	402	0.4975	0.5025
1500	756	744	0.504	0.496
3000	1503	1497	0.501	0.499

◆历史上一些抛掷硬币的试验结果.

试验者	抛掷次数 (n)	正面向上的次数 (频数 m)	频率 ($\frac{m}{n}$)
棣莫弗	2048	1061	0.5181
布丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

★**问题 2**: 为什么当试验次数不断增多时, 正面向上的频率总是在 0.5 左右波动? 0.5 的意义是什么?

◆**概率**: 频率的稳定性

大量的试验证明, 在任何确定次数的随机试验中, 一个随机事件 A 发生的频率具有随机性. 一般地, 随着试验次数 n 的增大, 频率偏离概率的幅度会缩小, 即事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于事件 A 发生的概率 $P(A)$, 我们称频率的这个性质为频率的稳定性. 因此我们可以用频率 $f_n(A)$ 估计概率 $P(A)$.

★**问题 3**: 事件 A 的概率 $P(A)$ 的范围是什么? 它随着试验次数的改变而改变吗? 频率与概率有何区别和联系?

◆**频率与概率的区别和联系**: (重点、难点)

- (1) 频率是概率的_____, 随着试验次数的增加, 频率会_____;
- (2) 频率本身是_____的, 在试验前不能确定;
- (3) 概率是一个_____的数, 是客观存在的, 与每次试验无关.

★**问题 4**: 研究随机事件的概率有何意义?

答: 任何事件的概率是 0~1 之间的一个确定的数, 它度量该事情发生的可能性. 小概率事件很少发生, 而大概率事件则经常发生. 知道随机事件的概率有利于我们作出正确的决策.(例子)

【例一】一个游戏包含两个随机事件 A 和 B , 规定事件 A 发生则甲获胜, 事件 B 发生则乙获胜. 判断游戏是否公平的标准是事件 A 和 B 发生的概率是否相等.

在游戏过程中甲发现: 玩了 10 次时, 双方各胜 5 次; 但玩到 1000 次时, 自己才胜 300 次, 而乙却胜了 700 次. 据此, 甲认为游戏不公平, 但乙认为游戏是公平的. 你更支持谁的结论? 为什么?

【例二】对某电视机厂生产的电视机进行抽样检测的数据如下:

抽取台数	50	100	200	300	500	1000
优等品数	40	92	192	285	478	954

(1) 计算表中优等品的各个频率;

(2) 该厂生产的电视机优等品的概率是多少?

★**问题 5**: 有人说, 既然抛掷一枚硬币出现正面向上的概率为 0.5, 那么连续抛掷两次一枚质地均匀的硬币, 一定是一次正面向上, 一次反面向上. 你认为这种想法

正确吗? 如果某种彩票的中奖概率为 $\frac{1}{1000}$, 那么买

1000 张这种彩票一定能中奖吗?

★**问题 6**: 如果连续 10 次掷一枚骰子, 结果都出现 1 点. 你认为这枚骰子的质地均匀吗? 为什么?

极大似然法的思想:如果我们面临的是从多个可选答案中挑选正确答案的决策任务,“使得样本出现的可能性最大”可以作为决策的准则.这种判断问题的分法称为极大似然法,极大似然法是统计工作中最重要的统计思想方法之一.

【思考1】:设有外形完全相同的两个箱子,甲箱有99个白球1个黑球,乙箱有1个白球99个黑球,今随机地抽取一箱,再从取出的一箱中抽取一球,结果取得白球,问这球从哪一个箱子中取出?

★问题7:某地气象局预报说,明天本地降水概率为0.7,你认为下列两个解释哪一个能代表气象局的观点?

- (1)明天本地有70%的区域下雨,30%的区域不下雨.
- (2)明天本地下雨的机会是70%.

【思考2】:天气预报说昨天的降水概率为90%,结果昨天根本没下雨,能否认为这次天气预报不准确?如何根据频率与概率的关系判断这个天气预报是否正确?

【例3】(1)下列说法正确的是()

- A.由生物学知识知道生男生女的概率均约为0.5,一对夫妇生两个孩子,则一定为一男一女
- B.在一次摸奖活动中,中奖概率为0.2,则摸5张票,一定有一张中奖
- C.10张票中有一张奖票,10人去摸,谁先摸则谁摸到的可能性大
- D.一年按365天计算,两名学生的生日相同的概率是 $\frac{1}{365}$

(2)某市交警部门在调查一起车祸过程中,所有的目击证人都指证肇事车是一辆普通桑塔纳出租车,但由于天黑,均未看清该车的车牌号码及颜色,而该市有两家出租车公司,其中甲公司有100辆桑塔纳出租车,3000辆帕萨特出租车;乙公司有3000辆桑塔纳出租

车,100辆帕萨特出租车,交警部门应认定肇事车为哪个公司的车辆较合理()

- A.甲公司
- B.乙公司
- C.甲、乙公司均可
- D.以上都对

【例四】在科技馆里,小亮看见一台名为帕斯卡三角的仪器,如图所示,当一实心小球从入口落下,它在依次碰到每层菱形挡块时,会等可能地向左或向右落下.

(1)试问小球通过第二层A位置的概率是多少?

(2)请用学过的数学方法模拟试验,并具体说明小球下落到第三层B位置和第四层C位置处的概率各是多少?

知识点2 用随机模拟法估计概率

1. 随机数的产生

(1)标号:把 n 个大小、形状相同的小球分别标上 $1,2,3,\dots,n$.

(2)搅拌:放入一个袋中,把它们充分搅拌.

(3)摸取:从中摸出一个.

这个球上的数就称为从 $1\sim n$ 之间的随机整数,简称随机数.

2. 伪随机数的产生

(1)规则:依照确定的算法.

(2)特点:具有周期性(周期很长).

(3)性质:它们具有类似随机数的性质.

计算机或计算器产生的随机数并不是真正的随机数,我们称为伪随机数.

3. 产生随机数的常用方法

①用计算器产生;②用计算机产生;③抽签法.

4. 随机模拟方法(蒙特卡洛方法)

利用计算机或计算器产生的随机数来做模拟试验,通过模拟试验得到的频率来估计概率,这种用计算机或计算器模拟试验的方法称为随机模拟方法或蒙特卡洛方法.

【例五】(1)在利用整数随机数进行随机模拟试验中,整数 a 到整数 b 之间的每个整数出现的可能性是_____.

(2)已知某运动员每次投篮命中的概率是40%.现采用随机模拟的方法估计该运动员三次投篮恰有两次命中的概率:先由计算器产生0到9之间取整数值的随机数,指定1,2,3,4表示命中,5,6,7,8,9,0表示不命中;再以每三个随机数为一组,代表三次投篮的结果.经随机模拟产生了如下10组随机数:907 966 191 925 271 431 932 458 569 683.该运动员三次投篮恰有两次命中的概率为()

- A. $\frac{1}{5}$
- B. $\frac{3}{5}$
- C. $\frac{3}{10}$
- D. $\frac{9}{10}$

选择性必修1 第一章、空间向量与立体几何

1.1.1 空间向量及其线性运算

【学习目标】

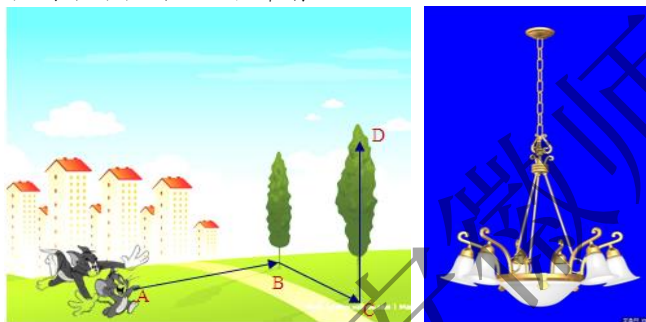
1. 了解空间向量的概念，掌握空间向量加减运算法则，会用图形说明空间向量加法、减法及它们的运算律，并感受它与平面向量加减运算法则的异同
2. 体会向量及其加减运算由平面向空间推广的过程，学会把空间问题化为平面问题

【重点】空间向量加减运算的法则及其运算律

【难点】由平面向量类比学习空间向量

【情境引入】

在必修2中我们学习了平面向量，并且知道物理学中的位移、速度和力都是向量，但在实际生活中，很多向量却未必都在同一平面内，如猫捉老鼠时老鼠先在地面上向西跑了4米，后向南跑了3米，最后沿着树笔直向上爬了5米（下左图），如何刻画老鼠的总位移呢？又如一吊灯重10kg，被三根链子吊起来（下右图），已知三根吊链长度相同，且每一根与它相邻的两根夹角都是 60° ，问每根链子的承受力至少多大，才能确保灯能安全的被吊着？



★问题 1：以上两个问题中的向量在同一平面上吗？如何定义它们？

答：_____

★问题 2：我们前面学习了平面向量，如何将平面向量的相关概念与运算推广到空间向量中来？

	平面向量	空间向量
定义	在空间，把具有_____和_____的量叫做空间向量，向量不能比较大小	
表示	空间向量用_____表示， $\mathbf{a}$ 的起点是A，终点是B，则 $\mathbf{a}$ 也可记为_____	
向量的模	向量的_____叫做向量的长度或模， $\mathbf{a}$ 的模表示为_____或_____	
零向量	规定_____的向量叫做零向量，记为_____，它的方向_____	
单位向量	_____的向量称为单位向量	
相等向量	方向_____且模_____的向量称为相等向量	

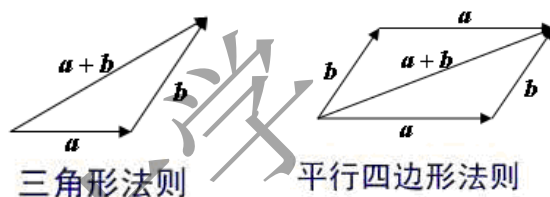
相反向量	与 $\mathbf{a}$ 长度_____而方向_____的向量称为 $\mathbf{a}$ 的相反向量，记为_____
------	--

☆思考 1： $\mathbf{a}-\mathbf{a}=\underline{\hspace{2cm}}$ ， $-(-\mathbf{a})=\underline{\hspace{2cm}}$ ；

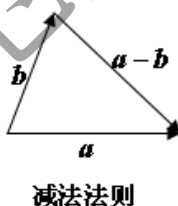
☆思考 2：共起点的所有平面单位向量终点的轨迹为_____；
共起点的所有空间单位向量终点的轨迹为_____

★问题 3：我们学过向量的哪些运算律？这些运算律能否类比推广到空间向量中来？

(1) 向量的加法法则：



(2) 向量的减法法则：



(3) 向量的加法交换律：

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$$

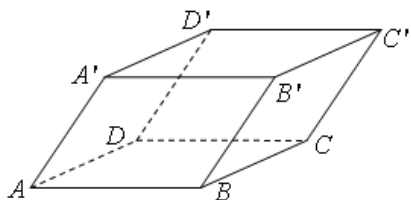
(4) 加法结合律：

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

★问题 4：你能证明空间向量的交换律和结合律吗？

证明结合律时，与证明平面向量的结合律有什么不同？

〔引导思考1〕：如图，在平行六面体（底面是平行四边形的四棱柱） $ABCD-A'B'C'D'$ 中，分别标出 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ ， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$ 表示的向量，从中你能体会向量加法运算的交换律及结合律吗？



【引导思考2】：一般地，三个不共面的向量的和与这三个向量有什么关系？

三个不共面的向量的和等于从这三个向量为邻边的平行六面体的体_____所表示的向量.

【引导思考3】：推广：(向量的多边形法则)

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例一】1、判断：

- (1) 零向量没有方向；()
- (2) 若 $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|$ ，则 $\mathbf{a}=\pm\mathbf{b}$ ；()
- (3) 若 $|\mathbf{a}|=0$ ，则 $\mathbf{a}=\mathbf{0}$ ；()
- (4) 若 $|\mathbf{a}|>|\mathbf{b}|$ ，则 $\mathbf{a}>\mathbf{b}$ ；()
- (5) 若 $\mathbf{m}=\mathbf{n}, \mathbf{n}=\mathbf{p}$ ，则 $\mathbf{n}=\mathbf{p}$ 。()

2、给出下列命题：

- ①单位向量没有确定的方向；
- ②空间向量是不能平行移动的；
- ③有向线段可用来表示空间向量，有向线段长度越长，其所表示的向量的模就越大；
- ④如果两个向量不相同，那么它们的长度也不相等.

其中正确的是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①③④

【例二】如图为棱长为1的正方体，

- (1) 写出棱长为 $\sqrt{2}$ 的向量；

答：_____

- (2) 写出棱长为 $\sqrt{3}$ 的向量；

答：_____

- (3) 写出与 $\overrightarrow{A_1B}$ 相等的向量；

答：_____

- (4) 写出与 $\overrightarrow{A_1B}$ 共线的向量；

答：_____

- (5) 化简： $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1D} = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

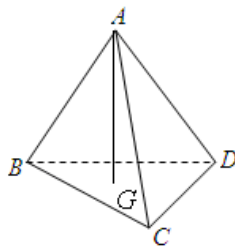
$$\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{CB} = \underline{\hspace{2cm}};$$

- (6) 下列结果为 $\overrightarrow{AC_1}$ 的有_____ (填序号)

- ① $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CC_1}$ ； ② $(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) + \overrightarrow{D_1C_1}$ ；
③ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1}) + \overrightarrow{B_1C_1}$ ； ④ $(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) + \overrightarrow{B_1C_1}$.

【例三】化简 $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$.

【例四】设A是 $\triangle ABCD$ 所在平面外的一点，G是 $\triangle ABCD$ 的重心，求证： $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.



★问题5：你能利用所学的空间向量的知识解决“情境引入”的问题吗？

答：_____

【练习】三个力都是200N，相互间夹角为 60° ，能否提起一块重500N的钢板？

答：_____

1.1.2 空间向量的数乘运算

【学习目标】

- 初步掌握数乘运算, 理解运算率, 理解并掌握共线向量定理、共面向量定理及其它们的推论形式
- 会用共线向量定理、共面向量定理解决空间几何中的简单问题

【重点】共线向量定理、共面向量定理及其它们的推论的推导与应用

【难点】运用向量方法解决几何问题

【复习引入】

上一节课, 我们借助“类比思想”把平面向量的有关概念及加减运算扩展到了空间. 两个空间向量的加、减法与两个平面向量的加、减法实质是一样的. 这是因为: 空间任意两个向量都可平移到同一个平面内, 成为同一平面内的向量, 因此凡是涉及空间任意两个向量的问题, 平面向量中有关结论仍适用于它们.而平面向量还有数乘运算及相应的运算率, 借助类比思想, 同样可以定义空间向量的数乘运算及相应的运算律.

	平面向量	空间向量
数乘运算的定义	实数 λ 与空间向量 $\vec{a}$ 的乘积, 即 $\lambda\vec{a}$. 注: (1) 结果仍然是一个_____; (2) 方向:	
	$\lambda > 0$	$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向_____
	$\lambda < 0$	$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 方向_____
	$\lambda = 0$	$\lambda\vec{a} = \vec{0}$, 方向_____
	(3) 大小: $\lambda\vec{a}$ 的长度是 $\vec{a}$ 的长度的_____倍.	
数乘运算的运算律	分配律: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$	
	$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$	
	结合律: $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$	

★问题 1: 空间向量 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 之间是何关系? 所在的直线之间又是何关系?

共线向量(或平行向量)的定义:

表示空间向量的有向线段所在直线互相_____或_____, 则称这些向量叫共线向量.(或平行向量) 记作 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

☆注: (1) 向量平行与直线平行的比较;
(2) 关注零向量(与任何向量平行);

★问题 2: 对空间任意两个向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$, 如果 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 那么 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 有什么相等关系? 反过来呢?

共线向量基本定理:

对于空间任意两个向量 $\vec{a}, \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$, 则 $\vec{a} \parallel \vec{b}$
 $\Leftrightarrow \exists$ _____ 的实数 $\lambda \in R$, 使 $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

☆注: ①为什么规定 $\vec{b} \neq \vec{0}$? (_____)

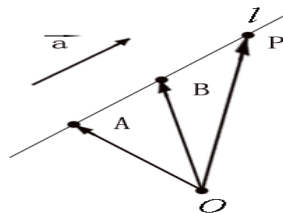
②若 $\vec{a} \parallel \vec{b}, \vec{b} \parallel \vec{c}$, 则 $\vec{a}$ 一定平行于 $\vec{c}$ 吗? (_____ 因为_____)

③两者互为充要条件.

★问题 3: 由上可知, 两个共线向量所在直线可能平行, 也可能重合. 但如果两个共线向量经过同一个点, 则这两个共线向量所在直线一定_____.

★问题 4: 如图, l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 $\vec{a}$ 的直线 ($\vec{a}$ 叫做 l 的方向向量), O 为 l 外空间一点, 问点 P 在直线 l 上的充要条件是什么?

答: 点 P 在直线 l 上 $\Leftrightarrow$ _____



共线向量基本定理的推论:

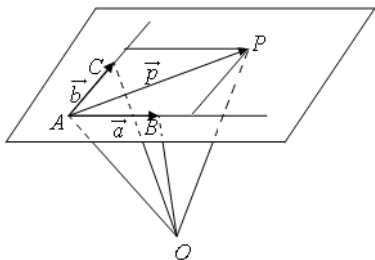
共起点的三个向量 $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ 的终点 A, B, C 三点共线的充要条件是_____

特别地, 点 P 是 AB 中点时, 有_____

★问题 5: 平行于同一个平面的向量, 叫做共面向量, 我们知道空间任意两个向量总是共面的, 但空间任意三个向量却不一定共面, 若空间三个向量起点移至重合, 需要满足什么条件才能使得三个向量共面?

【引导思考 1】: 这个问题分为几种情况分析?

【引导思考2】: 如图, 若 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线, 要使得 $\overrightarrow{AP}$ 与它们共面 (点 P 在平面 ABC 上) 的充要条件是什么?



共面向量基本定理:

对于空间任意三个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ ($\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线), 则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ 共面 $\Leftrightarrow \exists$ _____ 的实数 _____, 使得 _____

共面向量基本定理的推论:

共起点的四个向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OP}$ 的终点 A、B、C、P 四点共面的充要条件是 _____

特别地, 点 P 是 $\triangle ABC$ 重心时, 有 _____

☆注: 空间中任意一个平面由空间一点及两个不共线向量惟一确定.

【练习1】: 已知点 M 在平面 ABC 内, 并且对空间任一点 O, 存在 $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$, 则 $x =$ _____.

【练习2】: 已知 A、B、C 三点不共线, 对平面外一点 O, 在下列各条件下, 点 P 是否与 A、B、C 一定共面?

(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$; _____

(2) $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$; _____

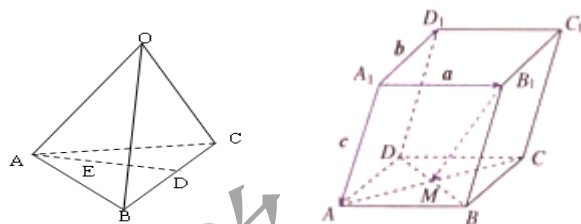
(3) $\overrightarrow{OA} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{OC}$; _____

【思考】: 对比三点共线与四点共面的充要条件的结论, 你有什么发现?

【例一】下列命题中正确的是()

- A. 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线, $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 共线, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 共线
- B. 向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面即它们所在的直线共面
- C. 零向量没有确定的方向
- D. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则存在唯一的实数 λ , 使 $\vec{a} = \lambda \vec{b}$

【例二】1、(安徽) 在四面体 O-ABC 中, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, D 为 BC 的中点, E 为 AD 的中点, 则 $\overrightarrow{OE} =$ _____ (用 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 表示)



2、如上右图, 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, AC 与 BD 的交点为点 M, 设 $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{A_1A} = \vec{c}$, 则下列向量中与 $\overrightarrow{B_1M}$ 相等的向量是()

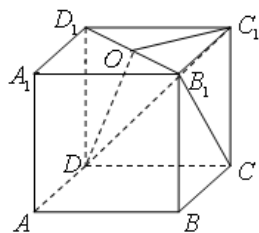
A. $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

D. $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$

【例三】如图, 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是 B_1D_1 的中点, 求证: $B_1C \parallel$ 平面 ODC_1 .



1.1.3 空间向量的数量积运算与正交分解的坐标表示

【学习目标】

1. 掌握空间向量数量积的定义及性质，熟记空间向量数量积满足的运算律，能类比平面向量理解其几何意义
2. 能运用空间向量的数量积求距离及夹角，同时会用数量积证明有关线、面位置关系的一些定理

【重点】 向量数量积的定义、运算律及应用

【难点】 用向量方法证明有关线、面位置关系的问题

【复习引入】

这一节课，我们继续借助“类比思想”把平面向量的数量积的运算扩展到空间向量的数量积运算. 先回顾一下平面向量的数量积运算是如何定义的？

【探究一】：空间向量的数量积

	平面向量	空间向量
向量的夹角	已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，在空间任取一点 O ，作 $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角，记为_____，夹角的范围为_____。 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 θ ， 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $\theta =$ _____； 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\theta =$ _____。	已知两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，在空间任取一点 O ，作 $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，则 $\angle AOB$ 叫做向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角，记为_____，夹角的范围为_____。 设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 θ ， 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $\theta =$ _____； 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\theta =$ _____。
两个向量数量积的定义	已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，它们的夹角为 θ ，我们把_____叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的_____，记为_____，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 规定： $\vec{0} \cdot \vec{a} =$ _____。	已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，它们的夹角为 θ ，我们把_____叫做向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的_____，记为_____，即 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 规定： $\vec{0} \cdot \vec{a} =$ _____。
两个向量数量积的性质	若 $\vec{a}, \vec{b}$ 是非零向量， $\vec{e}$ 是与 $\vec{b}$ 方向相同的单位向量， θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的夹角，则 ① $\vec{e} \cdot \vec{a} =$ _____。 ② $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ _____。 ③ 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 特别地， $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ 或 $ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ 。 ④ 若 θ 为 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角，则 $\cos \theta =$ _____。 ⑤ $ \vec{a} \cdot \vec{b} $ _____ $ \vec{a} \vec{b} $ 。	若 $\vec{a}, \vec{b}$ 是非零向量， $\vec{e}$ 是与 $\vec{b}$ 方向相同的单位向量， θ 是 $\vec{a}$ 与 $\vec{e}$ 的夹角，则 ① $\vec{e} \cdot \vec{a} =$ _____。 ② $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ _____。 ③ 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 反向，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 特别地， $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} ^2$ 或 $ \vec{a} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ 。 ④ 若 θ 为 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角，则 $\cos \theta =$ _____。 ⑤ $ \vec{a} \cdot \vec{b} $ _____ $ \vec{a} \vec{b} $ 。
两个向量数量积的运算律	空间向量的数量积满足如下的运算律： ① 数乘结合律： $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} =$ _____。 ② 交换律： $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 ③ 分配律： $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$ _____。	空间向量的数量积满足如下的运算律： ① 数乘结合律： $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} =$ _____。 ② 交换律： $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____。 ③ 分配律： $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$ _____。

【练习1】：判断正误：

- (1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 的几何意义就是向量 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影与 $|\vec{b}|$ 的乘积。()
- (2) 对于向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ，由 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ ，可以得到 $\vec{b} = \vec{c}$ 。()
- (3) 对于向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ，若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = k$ ，则可以写成 $\vec{a} = \frac{k}{\vec{b}}$ (或 $\vec{b} = \frac{k}{\vec{a}}$)。()
- (4) 若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 为三个不共线的向量，有 $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$ 。()

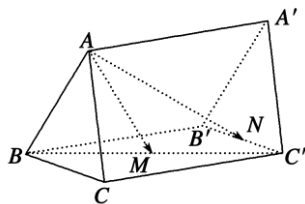
根据平面向量基本定理，平面内的任意一个向量 $\vec{a}$ 都可以用两个不共线的向量 $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ 来表示 $\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$ ，我们设想将这个原理类推到空间，并建立空间向量基本定理及其坐标表示。

空间向量基本定理：

若三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，则对空间任一向量 $\vec{p}$ ，存在_____有序实数组 $\{x, y, z\}$ ，使得_____。
其中 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 叫做空间的一个_____， $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都叫做_____。

注：如果三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面，那么所有空间向量组成的集合就是 $\{\vec{p} | \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, x, y, z \in \mathbf{R}\}$ ，这个集合可看作是由向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 生成的，我们把 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 叫做空间的一个基底， $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 都叫做_____，空间任何三个_____不共面_____的向量都可构成空间的一个基底，同一(相等)向量在不同基底下的坐标_____不同_____，在同一基底下的坐标_____相同_____。

【练习1】如图，在三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 中，已知 $\vec{AA'} = \vec{a}$ ， $\vec{AB} = \vec{b}$ ， $\vec{AC} = \vec{c}$ ，点 M, N 分别是 $BC', B'C'$ 的中点，试用基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 表示向量 $\vec{AM}, \vec{AN}$ 。



【例一】如图，已知空间四边形ABCD的每条边及AC、BD的长都等于1，点E、F、G分别是AB、AD、DC的中点，求：

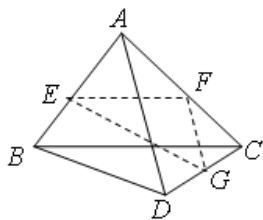
(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____

(2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DB} =$ _____

(3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____

(4) $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BA} =$ _____

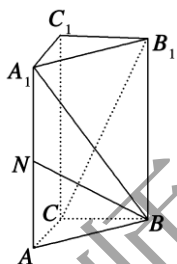
(5) $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GF} =$ _____



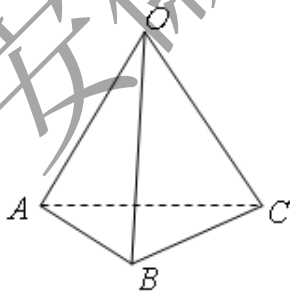
【例二】如图，在直三棱柱ABC-A₁B₁C₁中，CA=CB=1，∠BCA=90°，棱AA₁=2，点N为AA₁的中点。

(1) 求 $|\overrightarrow{BN}|$ 的值。

(2) 求 $\cos \langle \overrightarrow{BA_1}, \overrightarrow{CB_1} \rangle$ 的值。



【例三】如图，空间四边形OABC中，OA⊥BC，OB⊥AC，求证：OC⊥AB。



【探究二】：空间向量的坐标表示

设 e_1, e_2, e_3 为有公共起点 O 的三个两两垂直的单位向量(我们称它们为单位正交基底)。以 e_1, e_2, e_3 的公共起点 O 为原点，分别以 e_1, e_2, e_3 的方向为

x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 。对于空间任意一个向量 p 一定可以把它平移，使它的起点与原点 O 重合，得到向量 $\overrightarrow{OP}=p$ ，由空间向量基本定理可知，存在有序实数组 $\{x, y, z\}$ ，使得 $p = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ 。我们把 x, y, z 称作向量 p 在单位正交基底 e_1, e_2, e_3 下的坐标，记作：

$$p = (x, y, z).$$

★问题 1：对一个给定的向量 $\vec{p}$ ，其坐标惟一吗？相等向量的坐标相等吗？

★问题 2：若向量 $\vec{p} = (x, y, z)$ ，作 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ ，则点 P 的坐标是什么？ p 的模长为多少？

〔练习 3〕：(1) 已知 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为有公共起点 O 的单位正交基底，则 $\vec{i} \cdot \vec{j} =$ _____， $\vec{j} \cdot \vec{k} =$ _____， $\vec{i} \cdot \vec{k} =$ _____， $\vec{i} \cdot \vec{i} =$ _____， $\vec{j} \cdot \vec{j} =$ _____， $\vec{k} \cdot \vec{k} =$ _____。

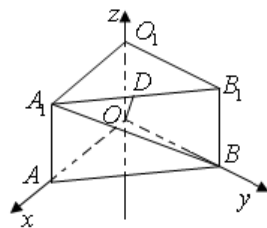
(2) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 为空间的一个基底，且存在实数 x, y, z ，使得 $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{0}$ ，则 $x =$ _____， $y =$ _____， $z =$ _____。

【例五】在直三棱柱 $ABO-A_1B_1O_1$ 中，

$$\angle A = \frac{\pi}{2},$$

$|AO| = 4, |BO| = 2, |AA_1| = 4$ ， D 为 A_1B_1 的中点，

则在如图所示的空间直角坐标系中， $\overrightarrow{DO}$ 的坐标是 _____， $\overrightarrow{A_1B}$ 的坐标是 _____。



【例六】已知 $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n} - 4\vec{p}$ ， $\vec{b} = (x+1)\vec{m} + 8\vec{n} + 2y\vec{p}$ ，且 $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ 不共面，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则 $x =$ _____， $y =$ _____。

3.1.4 空间向量运算的坐标表示与坐标运算

【学习目标】

1. 理解空间向量坐标的概念, 会确定一些简单几何体的顶点的坐标, 并能利用坐标方法判断两个向量共线或垂直从而推导所在直线间的位置关系
2. 掌握空间向量的加、减及数量积运算, 会求向量的模长与夹角, 并学会在立体几何问题中通过适当建立空间直角坐标系将空间向量的运算与向量的坐标表示结合起来解决一些夹角和距离有关的计算问题

【重点】空间向量的坐标运算及应用

【难点】利用向量方法解决立体几何中夹角和距离有关的问题

【复习引入】

1. 空间向量基本定理是什么?

若三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 不共面, 则对空间任一向量 $\vec{p}$, 存在_____有序实数组 $\{x, y, z\}$, 使得

2. 平面向量的坐标表示及运算律:

(1) 若 $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = (\underline{\hspace{2cm}}),$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (\underline{\hspace{2cm}}),$$

$$\lambda \vec{a} = (\underline{\hspace{2cm}})(\lambda \in \mathbb{R}),$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (\underline{\hspace{2cm}}).$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \underline{\hspace{2cm}}$$

★问题1: 我们知道, 向量 $\vec{a}$ 在平面上可用有序数对 (x, y) 表示, 那么对于空间向量可如何用坐标表示?

【引导思考1】: 如何定义空间直角坐标系?

若空间的一个基底的三个基向量互相垂直, 且长为1, 这个基底叫单位正交基底, 用 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ 表示; 在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, 以点 O 为原点, 分别以 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 的方向为正方向建立三条数轴: x 轴、 y 轴、 z 轴, 它们都叫坐标轴. 我们称建立了一个空间直角坐标系 $O-xyz$, 点 O 叫原点, 向量 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 都叫坐标向量. 通过每两个坐标轴的平面叫坐标平面, 分别称为 xOy 平面, yOz 平面, zOx 平面;

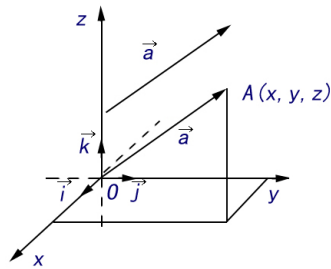
(☆注: (1) 作空间直角坐标系 $O-xyz$ 时, 一般使 $\angle xOy = 135^\circ$ (或 45°), $\angle yOz = 90^\circ$; (2) 在空间直角坐标系中, 让右手拇指指向 x 轴的正方向, 食指指向 y 轴的正方向, 如果中指指向 z 轴的正方向, 称这个坐标系为右手直角坐标系. 规定立几中建立的坐标系为右手直角坐标系.)

【引导思考2】: 如何定义空间向量的坐标?

在空间直角坐标系

 $O-xyz$ 中, 对空间任一点 A , 存在唯一的有序

实数组 (x, y, z) , 使 $\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, 有序实数组 (x, y, z) 叫作向量 $\vec{a}$ 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标, 记作 $A(x, y, z)$, x 叫横坐标, y 叫纵坐标, z 叫竖坐标.



【引导思考3】: 空间向量坐标表示后运算律是怎样的?

空间向量的直角坐标运算律:

(1) 若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\vec{a} + \vec{b} = (\underline{\hspace{2cm}});$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (\underline{\hspace{2cm}});$$

$$\lambda \vec{a} = (\underline{\hspace{2cm}})(\lambda \in \mathbb{R});$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ _____; (思考: 如何推导?)

 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____;

 $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____;

 $|\vec{a}| = \sqrt{\quad} =$ _____;

 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle =$ _____ =

 (2) 若 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

 则 $\overrightarrow{AB} =$ (_____);

A、B 两点间的距离:

$$d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| =$$

【点评】: 以上公式将空间向量的运算与向量的坐标表示结合起来, 可以使解决夹角和距离的计算问题变得很简单, 只需要我们建立适当的坐标系并利用向量方法进行计算求解即可.

 【练习 1】: 已知向量 $\vec{a} = (2, 4, 5)$, $\vec{b} = (3, x, y)$, 若

 $\vec{a} // \vec{b}$, 则 $x + y =$ _____

 【练习 2】: $\vec{a} = (1, 5, -2)$, $\vec{b} = (m, 2, m+2)$, 若

 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 m 的值为 _____.

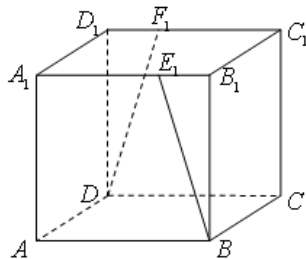
 【练习 3】: 与向量 $\vec{a} = (2, -1, 2)$ 共线, 且满足

 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -18$ 的向量 $\vec{b} =$ _____.

 【例一】 已知 $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (-3, 1, -4)$, 求

 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $8\vec{a}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

【例二】 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 E_1 、 F_1 分别是 A_1B_1 、 C_1D_1 的一个四等分点, 求 BE_1 与 DF_1 所成角的余弦值.



【例三】 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,

 E、F 分别是 D_1D 、 BD 的中点, G 在棱 CD 上, 且

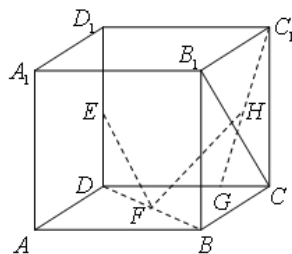
 $CG = \frac{1}{4}CD$, H 为 C_1G 的中点, 应用空间向量方法求

解下列问题:

 (1) 求证: $EF \perp B_1C$;

 (2) 求 EF 与 C_1G 所成的角的余弦值;

(3) 求 FH 的长.



3.2.1 直线的方向向量与平面的法向量

【学习目标】

1. 理解直线的方向向量、平面的法向量的概念, 知道能够利用直线的方向向量与平面的法向量来处理线面的位置关系
2. 会求平面的法向量, 并初步体会用向量方法处理线、线面、面面的位置关系的基本思想

【重点】平面的法向量的求解与应用

【难点】利用向量知识处理线线、线面、面面的位置关系

【复习引入】

1. 共线向量定理:

对空间任意的两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$), $\vec{a} \parallel \vec{b}$ 的充要(等价)条件是: _____

2. 共面向量定理:

如果两个向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线, 则向量 $\vec{p}$ 与向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 共面的充要(等价)条件为: _____

前面我们把平面向量推广到了空间向量, 并利用空间向量解决了一些立体几何的问题, 从中我们已初步体会到了向量逐渐成为解决空间几何的一个主要工具. 从本节课开始, 我们将深入探讨向量这一工具在立体几何中的应用. 首先, 如何用向量表示点、线、面的位置呢?

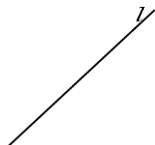
★问题 1: 在空间, 如何用向量表示一个点的位置?

P

O

在空间中, 我们取一定点 O 作为基点, 那么空间中任意一点 P 的位置就可以用 _____ 来表示. 我们把向量 _____ 称为点 P 的 位置向量.

★问题 2: 在空间, 如何用向量表示一条直线在空间里的位置?



在空间中, 任意一条直线 l 的位置可以由 _____ 以及 _____ 确定.

【思考 1】: 确定直线 l 方向的向量与 l 之间有什么关系?

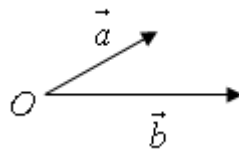
直线的方向向量: 把直线 l 上的向量 $\vec{e}$ 以及与 $\vec{e}$ 共线的向量叫做直线 l 的方向向量.

若点 A 在 l 上, $\vec{a}$ 是 l 的方向向量, 那么对于直线上任意一点 P, 都有 _____

☆注: 这样点 A 和向量 $\vec{a}$ 不仅可以确定直线 l 的位置, 还可以具体写出 l 上的任意一点.

★问题 3: 在空间, 如何用向量表示一个平面在空间中的位置? 给一个定点 A 和两个定方向(向量), 能确定吗?

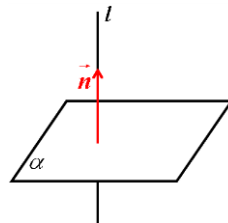
将两个向量平移至共起点, 对于平面 α 上的任一点 P, 则有 _____



☆注: 这样点 O 和向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 不仅可以确定直线 l 的位置, 还可以具体写出 l 上的任意一点.

★问题 4: 类似直线的方向向量, 平面有没有方向向量, 即: “如果只给一个定点和一个定方向(向量), 能确定一个平面在空间的位置”吗?

平面的法向量: 如果表示向量 $\vec{n}$ 的有向线段所在直线垂直于平面 α , 则称这个向量垂直于平面 α , 记作 _____, 此时向量 $\vec{n}$ 叫做平面 α 的 _____.



【思考 2】: 一个平面的法向量是否唯一? 如果不唯一, 它们之间有什么关系?

☆注: 1.法向量一定是非零向量;

2.一个平面的所有法向量都互相平行;

3.若向量 $\vec{n}$ 是平面的法向量, 且向量 $\vec{m}$ 与平面平行或在平面内, 则有_____

★问题 5: 那如何求解一个平面的法向量?

【例一】: 已知 $\overrightarrow{AB}=(2,2,1)$, $\overrightarrow{AC}=(4,5,3)$, 求平面 ABC 的单位法向量.

求平面法向量的一般步骤:

1. 设出平面的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

2. 找出(求出)平面内的两个不共线的向量的坐标
 $\vec{a}=(a_1,b_1,c_1)$, $\vec{b}=(a_2,b_2,c_2)$

3. 根据法向量的定义建立关于 x,y,z 的方程组

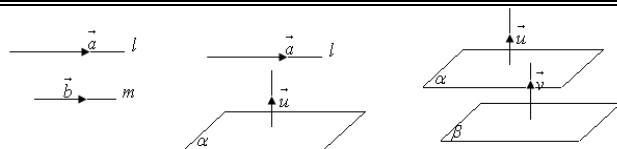
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

4. 解方程组, 取其中的一个解, 即得法向量.

★问题 6: 因为方向向量与法向量可以确定直线和平面的位置, 所以我们应该可以利用直线的方向向量与平面的法向量表示空间直线、平面间的平行、垂直、夹角等位置关系。你能用直线的方向向量与平面的法向量表示空间线线、线面、面面之间的平行、垂直位置关系吗?

【探究一】: 如何用向量方法表示线线、线面、面面之间的平行关系?

设直线 l, m 的方向向量分别为 $\vec{a}, \vec{b}$, 平面 α, β 的法向量分别为 $\vec{u}, \vec{v}$, 则:



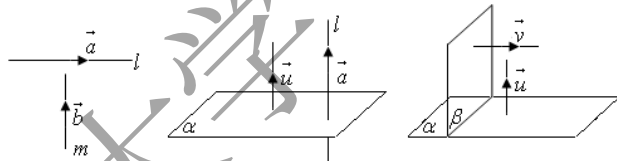
$$\text{线线平行 } l \parallel m \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

$$\text{线面平行 } l \parallel \alpha \Leftrightarrow \quad \quad \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{面面平行 } \alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \quad \quad \quad \Leftrightarrow$$

☆注: 这里的线线平行包括线线重合, 线面平行包括线在面内, 面面平行包括面面重合. 要排除这些情况在另加条件限制.

【探究二】: 如何用向量方法表示线线、线面、面面之间的垂直关系?



$$\text{线线垂直 } l \perp m \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{线面垂直 } l \perp \alpha \Leftrightarrow \quad \quad \quad \Leftrightarrow$$

$$\text{面面垂直 } \alpha \perp \beta \Leftrightarrow \quad \quad \quad \Leftrightarrow$$

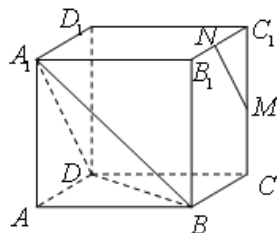
【例二】直线 l 的方向向量为 $\vec{a}=(2,-1,1)$, 平面 α 的法向量为 $\vec{n}=(\frac{1}{2}, 0, -1)$, 则 l 与 α 的位置关系为 ()

- A. $l \parallel \alpha$ B. $l \subset \alpha$
C. $l \perp \alpha$ D. $l \subset \alpha$ 或 $l \parallel \alpha$

【例三】如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M、N 分别是 C_1C 、 B_1C_1 的中点.

(1) 求证: $MN \parallel$ 平面 A_1BD ;

(2) 证明: 平面 $A_1BD \parallel$ 平面 CB_1D_1 .



1.2.2 利用空间向量证明平行、垂直关系

【学习目标】

1. 理解向量的平行或垂直如何反映空间中直线、线面、面面的平行、垂直关系

2. 会用向量解决空间中平行、垂直关系的问题

【重点】用直线的方向向量与平面的法向量来表示空间中的平行、垂直关系

【难点】如何实现线面位置关系与向量运算的联系

【复习引入】

1. 空间平行关系的向量表示

线 线 平 行	设直线 l_1、l_2 的方向向量分别为 $\vec{a}$、$\vec{b}$， _____ $\Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow$ 存在实数 λ，使 $\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.
线 面 平 行	设直线 l 的方向向量为 $\vec{a}$，平面 α 的法向量为 $\vec{n}$， $l \parallel \alpha$ 或 _____ $\Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow$ _____. $\Leftrightarrow$ 若 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 是与 α 平行的两个不共线向量，则存在两个实数 λ、μ，使 $\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.
面 面 平 行	设平面 α、β 的法向量分别为 $\vec{n}_1$、$\vec{n}_2$， $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 重合 $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ 存在实数 t，使 _____. $\Leftrightarrow$ 若 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$ 是与 α 平行的两个不共线向量，则 $\vec{v}_1 \perp \vec{n}_2$ 且 $\vec{v}_2 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow$ 存在实数 λ、μ，对 β 内任一向量 $\vec{a}$，有 $\vec{a} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 空间中垂直关系的向量表示

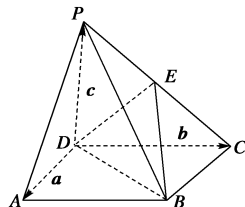
线 线 垂 直	设直线 l 的方向向量为 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，直线 m 的方向向量为 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，则 $l \perp m \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____
线 面 垂	设直线 l 的方向向量为 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，平面 α 的法向量为 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$，则

直 面 面 垂 直	$l \perp \alpha \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____ 若平面 α 的法向量为 $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$，平面 β 的法向量为 $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$，则 $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____
-----------------------	--

【练习1】：若直线 l 的方向向量为 $\vec{a} = (2, 0, 1)$ ，平面 α 的法向量为 $\vec{n} = (-4, 0, -2)$ ，则直线 l 与平面 α 的位置关系为(D)

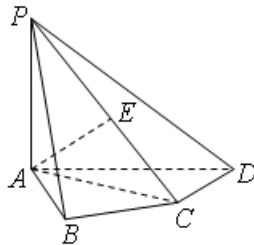
- A. l 与 α 斜交 B. $l \subset \alpha$
C. $l \parallel \alpha$ D. $l \perp \alpha$

【例一】在底面为正方形的四棱锥 $P-ABCD$ 中， E 是 PC 中点，求证： $PA \parallel$ 平面 EDB .

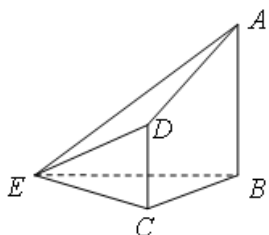


【例二】如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA \perp$ 底面 $ABCD$ ， $AB \perp AD$ ， $AC \perp CD$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ， $PA = AB = BC$ ， E 是 PC 的中点.

- (1) 证明 $CD \perp AE$ ；
(2) 证明 $PD \perp$ 平面 ABE .

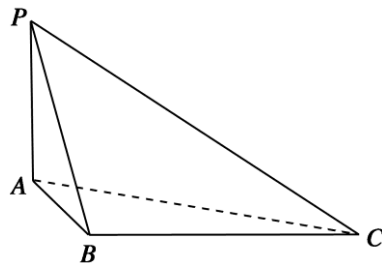


【例三】如图,在四棱锥 $E-ABCD$ 中, $AB \perp$ 平面 BCE , $CD \perp$ 平面 BCE , $AB=BC=CE=2CD=2$, $\angle BCE = 120^\circ$. 求证: 平面 $ADE \perp$ 平面 ABE .



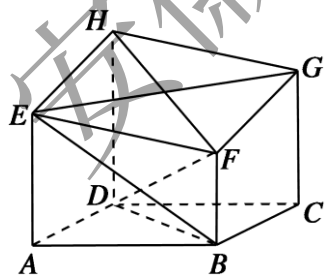
【例五】如图,三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA=1$, $AB=1$, $AC=2$, $\angle BAC=60^\circ$.

- (1)求三棱锥 $P-ABC$ 的体积;
- (2)证明: 在线段 PC 上存在点 M , 使得 $AC \perp BM$, 并求 $\frac{PM}{MC}$ 的值.



【例四】(合肥市模考)如图,六面体 $ABCD-HEFG$ 中, 四边形 $ABCD$ 为菱形, AE , BF , CG , DH 都垂直于平面 $ABCD$. 若 $DA=DH=DB=4$, $AE=CG=3$.

- (1)求证: $EG \perp DF$;
- (2)求 BE 与平面 $EFGH$ 所成角的正弦值.



1.2.3 利用空间向量求空间角

【学习目标】

1. 理解空间直线与直线所成的角、直线与平面所成的角、平面与平面所成的二面角及其平面角的概念，掌握它们各自的取值范围

2. 会用向量坐标方法解决线线、线面、面面的夹角的问题，注意各公式的区别与应用

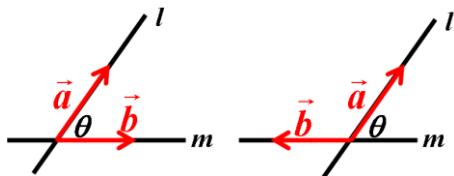
【重点】用向量坐标方法解决线线、线面、面面的夹角的问题

【难点】线面、面面之间的角与向量夹角的联系与区别，并理解公式的推导

【问题引入】

如何用向量方法求线线、线面、面面之间的夹角？

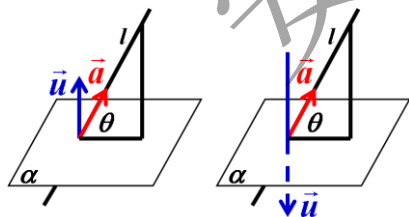
1、两异面直线所成的角



设异面直线 l, m 所成的角为 $\theta (\theta \in (0, \frac{\pi}{2}])$

则 $\cos \theta = |\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| =$ _____。

2、直线与平面所成的角

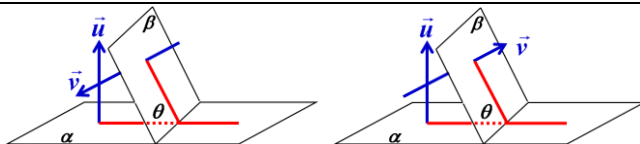


设直线 l 与平面 α 所成的角为 $\theta (\theta \in [0, \frac{\pi}{2}])$,

平面 α 的法向量为 $\vec{u}$ (如图),

则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{a}, \vec{u} \rangle| =$ _____。

3、二面角



设二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 $\theta (\theta \in (0, \pi))$,

平面 α, β 的法向量分别为 $\vec{u}, \vec{v}$ (如图),

则 $\theta = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ 或 $\theta =$ _____。

则 $|\cos \theta| =$ _____ = _____。

【练习1】若平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (4, 1, 1)$, 直线 l 的一个方向向量为 $\vec{a} = (-2, -3, 3)$, 则 l 与 α 所成角的余弦值为 ()

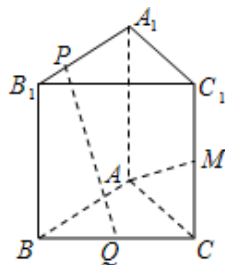
- A. $-\frac{\sqrt{11}}{11}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{11}$ C. $-\frac{\sqrt{110}}{11}$ D. $\frac{\sqrt{913}}{33}$

【练习2】若二面角的两个面的法向量分别为 $(4, 3, 0)$ 和 $(0, -3, 4)$, 则这个二面角的余弦值为 ()

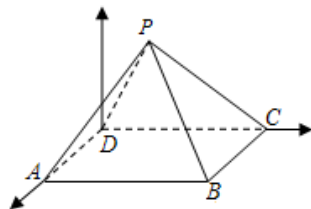
- A. $-\frac{9}{25}$ B. $\frac{9}{25}$
C. $\frac{7}{25}$ D. $\frac{9}{25}$ 或 $-\frac{9}{25}$

【例一】在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = AB$, $AB \perp AC$, M 是 CC_1 的中点, Q 是 BC 的中点, 点 P 在 A_1B_1 上, 则直线 PQ 与直线 AM 所成的角等于 ()

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°



(例一题图)

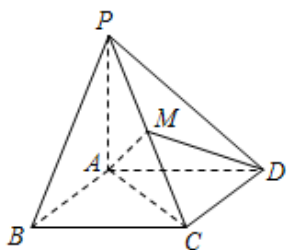


(例二题图)

【例二】如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 中平面 $PDC \perp$ 平面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 为边长等于 1 的正方形, $\triangle PCD$ 为正三角形, 求 PA 与平面 PBC 所成的角。

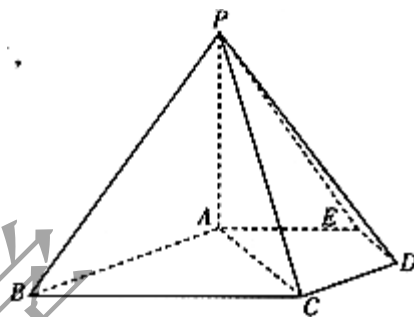
【例三】如图, 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, 且 $ABCD$ 为正方形, $PA=AB=a$, 点 M 是 PC 的中点.

- (1) 求 BP 与 DM 所成角的大小;
- (2) 求二面角 $M-DA-C$ 的大小.



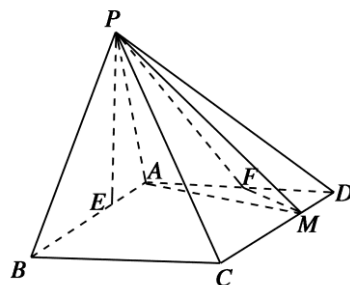
【例四】(山东卷) 如图, 在五棱锥 $P-ABCDE$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCDE$, $AB \parallel CD$, $AC \parallel ED$, $AE \parallel BC$, $\angle ABC=45^\circ$, $AB=2\sqrt{2}$, $BC=2AE=4$, 三角形 PAB 是等腰三角形.

- (I) 求证: 平面 $PCD \perp$ 平面 PAC ;
- (II) 求直线 PB 与平面 PCD 所成角的大小;
- (III) 求四棱锥 $P-ACDE$ 的体积.



【例五】(四川省双流中学高 11 月月考试题) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $AB=3$, $AD=2\sqrt{2}$, $\angle ABC=45^\circ$, P 点在底面 $ABCD$ 内的射影 E 在线段 AB 上, 且 $PE=2$, $BE=2EA$, F 为 AD 的中点, M 在线段 CD 上, 且 $CM=\lambda CD$.

- (1) 当 $\lambda=\frac{2}{3}$ 时, 证明: 平面 $PFM \perp$ 平面 PAB ;
- (2) 当平面 PAM 与平面 $ABCD$ 所成二面角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时, 求四棱锥 $P-ABCM$ 的体积.



1.2.4 利用空间向量求距离

【学习目标】

1. 经历用向量法求点面距离公式的探究过程, 能利用化归的思想将线到面、面到面的距离转化为点到面的距离来解决

2. 知道求空间中的各种距离的公式 $d = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$, 体会

向量方法求空间距离的完美统一

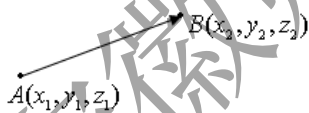
【重点】用向量法推导点到平面的距离公式及其在求距离问题中的应用

【难点】将线到线、线到面、面到面的距离转化为点到面的距离并用向量法求解

【问题引入】

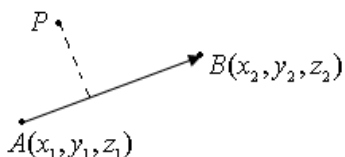
前面我们学习了利用向量的模长可以求解空间中两点间的距离, 那么空间中点到直线、点到平面、直线到直线、直线到平面、平面到平面间的距离又该如何求解?

★问题 1: 如何求空间中两点间的距离?



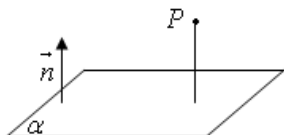
总结 1: 两点间的距离公式:

★问题 2: 如何求空间中点 P 到直线 AB 的距离?



总结 2: 点到直线的距离求法:

★问题 3: 如何求空间中点 P 到平面 α 的距离?



总结 3: 点到平面的距离求法:

如果令平面 α 的法向量为 $\vec{n}$, P_0 为平面 α 内任意一点, 则点 P 到平面 α 的距离为:

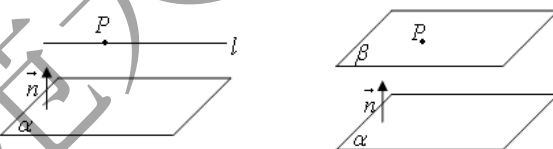
$$d = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

☆注: 求点到平面的距离的一般步骤为:

- (1) 求出该平面的一个法向量;
- (2) 求出从该点出发的平面的任一条斜线段对应的向量;
- (3) 求出法向量与斜线段向量的数量积的绝对值在除以法向量的模, 即得点到平面的距离.

〔练习 1〕: 已知平面 α 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 1, 1)$, 原点 $O(0, 0, 0)$ 在平面 α 内, 则点 $(4, 5, 3)$ 到 α 的距离为 _____.

★问题 4: 如何求空间中直线 l 到平面 α 的距离? 如何求空间中两平行平面之间的距离?

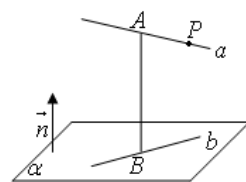


总结 4: 直线到平面 (平面到平面) 的距离求法:

若一条直线 (一个平面) 平行于 (另一) 一个平面, 则直线 (平面) 上任意一点到 (另一) 平面的距离 _____, 则线面距离 (面面距离) 可以转化为 _____ 求解, 即:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PP_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

★问题 5: 如何求空间中异面直线 a 与 b 之间的距离 (即两异面直线之间公垂线段的长度)?



总结 6: 两异面直线之间距离的求法:

- (1) 求出一个与 _____ 都垂直的向量 $\vec{n}$ (即公垂线的方向向量);
- (2) 在两条异面直线上分别取点 P 、 P_0 , 求出

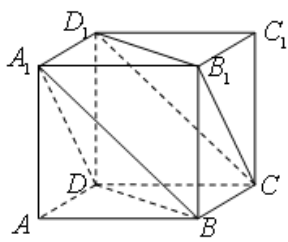
_____;

(3) 两条异面直线的距离 $d =$ _____

☆注：过直线 b 作一个平面 α 与直线 a 平行，则异面直线之间的距离也可以转化为_____。

【练习 2】若直线 a, b 是两条异面直线，它们的方向向量分别是 $(1, 1, 1)$ 和 $(2, -3, -2)$ ，则直线 a 和 b 的公垂线的单位方向向量是_____。

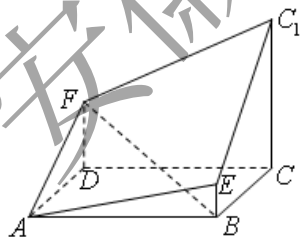
【练习 3】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，则平面 A_1BD 与平面 B_1CD_1 间的距离为_____。



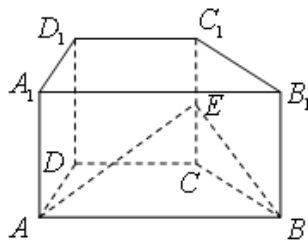
【例一】如图所示的多面体是由底面为 $ABCD$ 的长方体被截面 $AEQF$ 所截而得到的，其中 $AB=4$ ， $BC=2$ ， $CC_1=3$ ， $BE=1$ 。

(1) 求 BF 的长；

(2) 求点 C 到平面 $AEQF$ 的距离。



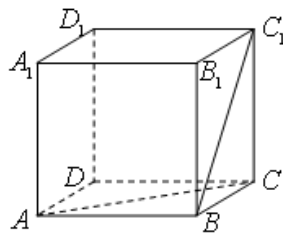
【例二】如图，在已知直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面为直角梯形， $AB \parallel CD$ ，且 $\angle ADC=90^\circ$ ， $AD=1$ ， $CD=\sqrt{3}$ ， $BC=2$ ， $AA_1=2$ ， E 是 CC_1 的中点，求 A_1B_1 到平面 ABE 的距离。



【例三】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知棱长为 2，

(1) 求异面直线 AA_1 与 BC_1 之间的距离；

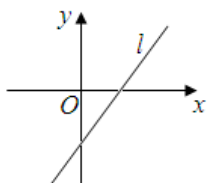
(2) 求异面直线 AC 与 BC_1 之间的距离。



选择性必修1 第二章、直线和圆的方程

2.1.1 倾斜角与斜率、2.1.2 两条直线平行与垂直的判定

我们知道，一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象是一条直线，那么反过来，平面直角坐标系中的直线都可以用方程 $y = kx + b$ (k, b 为常数) 来表示吗？



答：_____

★问题 1：直线方程 $y = kx + b$ 中的 k 与 b 有什么意义吗？对直线位置的确定有何影响？

答： k 称为_____，决定_____；

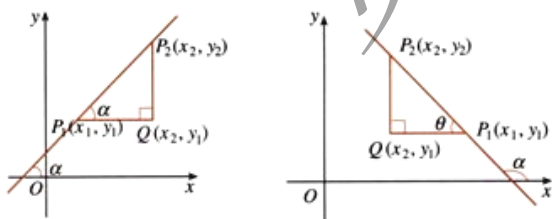
b 称为_____，是直线与_____轴交点的_____坐标。

方程 $y = kx + b$ 由直线 l 的斜率 k 和它在 y 轴上的截距 b 确定，所以这个方程也叫作直线的_____方程。

☆〔思考 1〕：截距 b 是距离吗？它的意义是什么？

答：_____

★问题 2：给定两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), (x_1 \neq x_2)$ ，如何求直线 P_1P_2 的斜率 k 。



经过两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2)$ 的直线的斜率公式：_____。

☆〔思考 2〕：当给定两点的横坐标相同时，直线有什么特征，上述公式还适用吗？为什么？

☆〔思考 3〕：若动点 P 的坐标为 (x, y) ，请说说式子

$\frac{y-3}{x-2}$ 的几何意义？那 $\frac{y+3}{x}$ 呢？

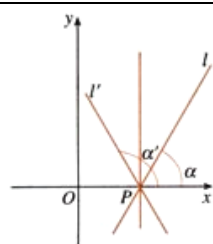
答： $\frac{y-3}{x-2}$ 的几何意义：_____

$\frac{y+3}{x}$ 的几何意义：_____。

★问题 3：除了用斜率刻画直线的倾斜程度，是否可以用倾斜的角度进行刻画？如何定义？

(在平面直角坐标系中，我们规定水平直线的方向向右，其他直线向上的方向为这条直线的方向，我们看到，这些直线相对于 x 轴的倾斜程度不同，也就是它们与 x 轴所成的角不同。因此，我们可以利用这样的角来表示这些直线的方向。)

当直线 l 与 x 轴相交时，我们取 x 轴作为基准， x 轴正方向与直线 l 之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角。(当直线 l 与 x 轴平行或重合时，我们规定它的倾斜角为_____)



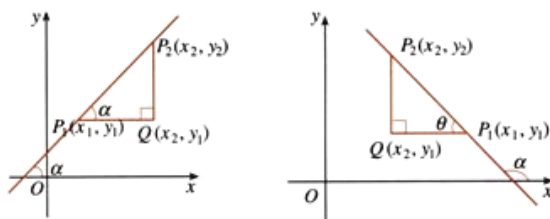
倾斜角 α 的范围为_____。

〔思考 4〕：任何一条直线都有倾斜角吗？不同的直线其倾斜角一定不相同吗？

答：任何一条直线都有唯一的倾斜角。

★问题 4：直线的倾斜角与斜率之间有联系吗？

〔探究〕：给定两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), (x_1 \neq x_2)$ ，求直线 P_1P_2 的斜率 k 与倾斜角之间的关系。



解：若倾斜角 α 为锐角时，

【思考5】: 若 α 为钝角时, 上面结论还成立吗?

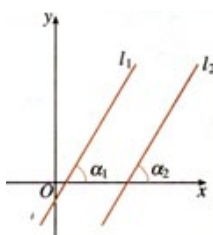
直线的斜率 k 与倾斜角 α 之间的关系:

$$k = \tan \alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

☆注: 若 $k > 0$, 倾斜角为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若 $k < 0$, 倾斜角为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若 $k = 0$, 倾斜角为 $\underline{\hspace{2cm}}$; 倾斜角是 90° 的直线斜率 $\underline{\hspace{2cm}}$.

☆【小练习】: 已知直线 l 的一个方向向量为 $(\cos 45^\circ, -\sin 45^\circ)$, 则直线 l 的倾斜角 $\theta = (\quad)$

A. 45° B. -45° C. 135° D. 315°



★问题 5: 如果两条直线平行, 那么它们的倾斜角有什么关系? 斜率呢? 反之也成立吗?

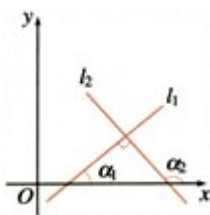
设两条不重合的直线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $l_1 \parallel l_2$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$; 反之, 若 $k_1 = k_2$, 则 $\underline{\hspace{2cm}}$. 特别地, 若两条不重合的直线的斜率不存在, 则这两条直线也 $\underline{\hspace{2cm}}$.

★问题 6: 如果两条直线互相垂直, 那么它们的倾斜角有什么关系? 斜率呢? 反之也成立吗?

推导: 设这两条直线 l_1, l_2 的倾斜角分别为 α_1 与 α_2 ($\alpha_1, \alpha_2 \neq 90^\circ$),

如图, $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$,

$k_2 =$



如果两条直线都有斜率, 且它们互相垂直, 那么它们的斜率之积 $\underline{\hspace{2cm}}$, 反之如果它们的斜率之积等于 $\underline{\hspace{2cm}}$, 那么它们互相垂直, 即

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}} \Leftrightarrow \underline{\hspace{2cm}}.$$

☆【思考6】: 如果两直线中至少一条斜率不存在, 它们平行或垂直时对应的斜率之间是怎样的情况?

答: (1)

(2)

☆【思考7】: 若 A, B, C 三点共线, 则直线 AB 的斜率和直线 AC 的斜率之间有什么关系? 有什么启发?

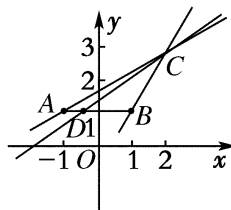
★问题 7: 倾斜角增大, 斜率一定增大吗? 斜率又是如何随倾斜角的变化而变化的?

【例一】已知坐标平面内三点 $A(-1, 1)$ 、 $B(1, 1)$ 、 $C(2, \sqrt{3}+1)$.

(1) 求直线 AB, BC, AC 的斜率和倾斜角;

(2) 若 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一动点, 求直线 CD 倾斜角 α 的取值范围.

(3) 若 E 为边 AC 上一动点, 分别求直线 BE 的倾斜角 β 和斜率 k 的取值范围.



【例二】若经过点 $P(1-a, 1+a)$ 和 $Q(3, 2a)$ 的直线的倾斜角为钝角, 求实数 a 的取值范围.

【点评】: 点的坐标 $\Leftrightarrow$ 斜率 $\Leftrightarrow$ 倾斜角, 三者之间可以互相转化.

【例三】(1) 已知直线 $(k-3)x + (4-k)y + 1 = 0$ 与 $2(k-3)x - 2y + 3 = 0$ 平行, 那么 k 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 直线 l 过点 $(-1, 2)$ 且与直线 $2x - 3y + 4 = 0$ 垂直, 则 l 的方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 已知直线 $l_1: x + (a-2)y - 2 = 0$, $l_2: (a-2)x + ay - 1 = 0$, 且 $l_1 \perp l_2$, 则 a 的值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【点评】: 当已知的点的坐标中含有字母时要注意对字母按斜率为零和没有斜率进行分类讨论.

2.2.1 直线的点斜式、(斜截式) 方程

【复习引入】

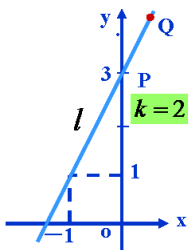
1. 确定一条直线的两个要素是什么?

答: 是_____和_____.

★问题 1: 如果已经告诉你一条直线上某一点坐标和这条直线的斜率, 如何写出这条直线的方程?

【探究 1】一条直线 l 如果过一个点 $P(0,3)$, 且斜率为 $k=2$, 这条直线是确定的吗? 该如何表示?

【引导思考 1】: 取这条直线上不同于点 P 的任意一点 $Q(x,y)$, 它的横坐标 x 与纵坐标 y 满足什么关系?

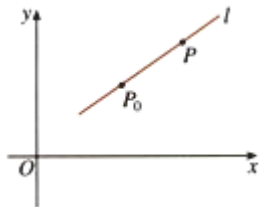


【引导思考 2】: 直线与方程有什么联系?

答: _____

【探究 2】: 如图, 直线 l 经过点 $P_0(x_0, y_0)$, 且斜率为 k , 求直线 l 的方程?

推导: 设点 $P(x,y)$ 是直线 l 上不同于点 P_0 的任意一点,



经过点 $P_0(x_0, y_0)$ 斜率为 k 的直线 l 的方程为:

这个方程是由直线上一定点及其斜率确定, 所以我们把它叫做直线的**点斜式方程**. (简称**点斜式**)

☆注: 直线的斜截式方程是直线点斜式方程的特殊情形, 即 $y-b=k(x-0)$.

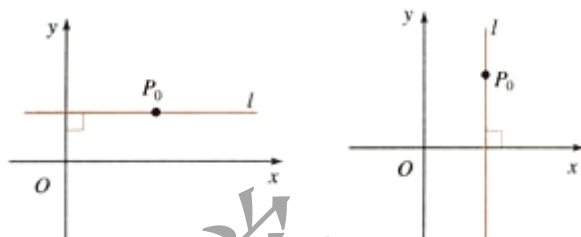
★问题 2: 平面直角坐标系中的所有直线都可以用点斜式方程表示吗?

【思考】: y 轴所在的直线方程是_____

x 轴所在的直线方程是_____

过点 $P_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 0° 的直线方程是_____

过点 $P_0(x_0, y_0)$, 倾斜角为 90° 的直线方程是_____



【练习 1】直线 l 经过点 $P_0(-2, 3)$, 且倾斜角 $\alpha=45^\circ$, 则直线 l 的点斜式方程为_____.

【练习 2】直线 l 的斜率为 k , 在 x 轴上的截距为 b , 则直线 l 的方程是 ()

- A. $y=kx+b$ B. $y=k(x-b)$
C. $y=k(x+b)$ D. $y=kx-b$

【练习 3】已知直线经过点 $P(-1,3)$, 求 (斜截式)

- (1) 斜率为 0 时的直线方程: _____;
- (2) 倾斜角为 90° 时的直线方程: _____;
- (3) 倾斜角为 120° 时的直线方程: _____;
- (4) 与直线 $y=3x-2$ 垂直的直线方程: _____;
- (5) 截距为 2 的直线方程: _____.

【例一】已知直线 $l_1: y=k_1x+b_1$, $l_2: y=k_2x+b_2$, 试讨论:

(1) $l_1 \parallel l_2$ 成立的充要条件是什么?

(2) $l_1 \perp l_2$ 成立的充要条件是什么?

(3) 当 a 为何值时, 直线 $l_1: y=-x+2a$, 与直线 $l_2: y=(a^2-2)x+2$ 平行?

【例二】求满足下列条件的直线方程:

(1) 经过点 $(2, -3)$, 倾斜角是直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 倾斜角的 2 倍;

(2) 经过点 $P(5, -2)$, 且与 y 轴平行;

(3) 过 $P(-2, 3)$, $Q(5, -4)$ 两点.

【例三】(1) 将直线 $y = \sqrt{3}(x-2)$ 绕点 $(2, 0)$ 按逆时针方向旋转 60° 后所得直线方程是()

A. $\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0$ B. $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$

C. $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$ D. $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$

(2) (多选题) 经过点 $M(1, 1)$ 且在两轴上截距相等的直线是()

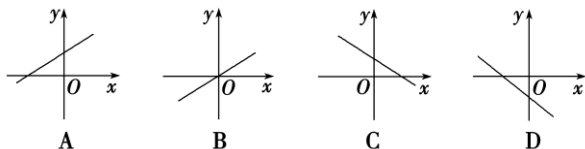
A. $x - y = 2$ B. $x = y$

C. $x = 1$ 或 $y = 1$ D. $x + y = 2$

(3) 若点 A 和点 B 的坐标分别为 $(1, 3)$ 和 $(2, 5)$, 则线段 AB 的垂直平分线所在直线方程的点斜式为_____.

(4) 若直线 $l: y = kx - \sqrt{3}$ 与直线 $y = -\frac{2}{3}x + 2$ 的交点位于第一象限, 则直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是_____.

【例四】(1) 若直线方程为 $y = ax - \frac{1}{a}$, 则其图象可能是下列中的()



(2) 已知直线 $y = ax - 2$ 和 $y = (a+2)x + 1$ 互相垂直, 则 $a =$ _____.

(3) 若直线 $l_1: y = -\frac{2}{a}x - \frac{1}{a}$ 与直线 $l_2: y = 3x - 1$ 互相平行, 则 $a =$ _____.

【例五】求斜率为 $\frac{3}{4}$, 且与两坐标轴围成的三角形的周长为 12 的直线的方程.

【例六】求过点 $P(3, 4)$ 且与坐标轴形成的交点为 A 、 B , 且点 P 在 A 、 B 之间, 求 $\triangle AOB$ 的面积的最小值, 并求此时直线 AB 的方程.

【例七】已知直线 $l: 5ax - 5y - a + 3 = 0$,

(1) 求证: 不论 a 为何值, 直线 l 总过第一象限;

(2) 为了使直线 l 不过第二象限, 求 a 的取值范围.

2.2.2 直线的两点式、(截距式) 方程

【学习目标】

1. 理解和掌握由点斜式方程推导出直线方程的两点式, 并由直线的两点式方程推导出直线方程的截距式
2. 能根据题设条件选择适当的形式熟练地求出直线方程, 并能用截距式解决所围面积相关问题

【重点】直线的两点式方程与截距式方程的推导应用

【难点】综合利用两点式与截距式求解相关问题

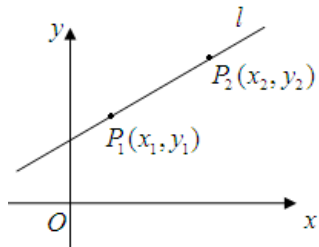
【复习引入】

1. 经过点 $P_0(x_0, y_0)$ 斜率为 k 的直线 l 的方程为: _____, 此为直线方程的 _____ 式.
2. 已知直线 l 的斜率为 k , 与 y 轴的交点是点 $P(0, b)$, 则直线 l 的方程为: _____, 此为直线方程的 _____ 式.
3. 点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 的中点坐标为 _____, P_1 与 P_2 的距离为 _____

★问题 1: 除了告诉我们直线上一点位置和斜率可以确定这条直线位置, 已知直线上两点位置, 也可以确定这条直线位置. 那如何求解通过已知两个点的直线方程呢?

【探究 1】: 已知两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$), 求出通过这两个点的直线 l 的方程.

【引导思考】: 如何利用前面所学到的点斜式推导



【思考】: 若两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 中有 $x_1 = x_2$ 或 $y_1 = y_2$, 此时过这两点的直线有两点式方程吗?

答: 当 $x_1 = x_2$ 时, 方程为 _____

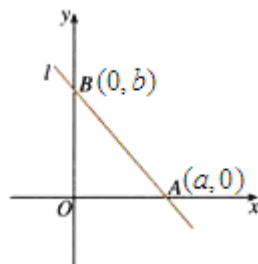
当 $y_1 = y_2$ 时, 方程为 _____

已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$), 则它的直线方程为 _____, 这叫做直线的 _____ 式方程.

★问题 2: 特别地, 如果告诉你直线与两坐标轴的交点坐标, 此时直线的方程是什么样的形式?

【探究 2】: 如图, 已知直线 l 与 x 轴的交点为 $A(a, 0)$, 与 y 轴的交点为 $B(0, b)$, 其中 $a \neq 0, b \neq 0$, 求直线 l 的方程.

【引导思考】: 利用刚所学的两点式推导



如果直线 l 在 x 轴上的截距为 a , 在 y 轴上的截距为 b , 那么它的直线方程为: _____, 这叫做直线的 _____ 式方程.

【思考 1】: 平行于 x 轴或 y 轴或过原点的直线可以写成截距式吗?

【思考 2】: 方程 $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$ 是直线的截距式方程吗?

【思考 3】: 在直线的截距式下, 直线的斜率 k 与截距之间有什么关系?

【小练习】: (1) 下列语句中正确的是 ()

A. 经过定点 $P(x_0, y_0)$ 的直线都可以用方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 表示

B. 经过任意两个不同点 $P(x_1, y_1)$ 、 $Q(x_2, y_2)$ 的直线都可以用方程 $(y-y_1)(x_2-x_1)=(x-x_1)(y_2-y_1)$ 表示

C. 不经过原点的直线都可以用方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 表示

D. 经过定点的直线都可以用 $y=kx+b$ 表示

(2) 求过下列两点的直线的两点式方程, 再化成斜截式方程:

① $A(-2, 1), B(3, -3)$;

② $A(0, 5), B(5, 0)$;

③ $C(-4, -5), D(0, 0)$.

【例一】已知三角形的三个顶点 $A(-4, 0)$, $B(0, -3)$, $C(-2, 1)$, 求:

(1) BC 边所在的直线方程;

(2) BC 边上中线所在的直线方程.

【例二】已知直线经过点 $A(1, 0)$, $B(m, 1)$, 求这条直线的方程.

【例三】直线 $ax+by=1 (ab \neq 0)$ 与两坐标轴围成的面积是 ()

A. $\frac{1}{2}ab$ B. $\frac{1}{2}|ab|$ C. $\frac{1}{2ab}$ D. $\frac{1}{2|ab|}$

【例四】已知直线 l 过点 $P(4, 1)$,

(1) 若直线 l 过点 $Q(-1, 6)$, 求直线 l 的方程;

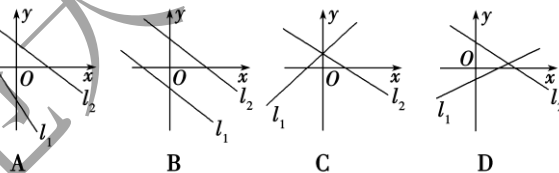
(2) 若直线 l 在 y 轴上的截距是在 x 轴上的截距的 2 倍, 求直线 l 的方程.

方法一:

方法二:

【点评】: 当遇直线在平坐标轴上截距相等或是倍数关系时, 务必考虑截距为零的情形.

【例五】两条直线 $l_1: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ 和 $l_2: \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = 1$ 在同一直角坐标系中的图象可以是 (A)



【例六】已知点 $A(2, 5)$ 和点 $B(4, -7)$, 试在 y 轴上求一点 P , 使得 $|PA| + |PB|$ 的值最小.

【例七】已知直线 l 过点 $P(-2, 1)$.

(1) 当直线 l 与点 $B(-5, 4)$, $C(3, 2)$ 的距离相等时, 求直线 l 的方程;

(2) 当直线 l 与 x 轴、 y 轴围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

2.2.3 直线的一般式方程

【学习目标】

1. 理解直线与二元一次方程之间的一一对应关系, 学会用二元一次方程的形式表示一条直线, 即直线方程的一般式
2. 比较直线的五种表示形式的异同点, 理解和掌握它们各自的适用条件, 并能根据给定条件用适当的形式求解直线方程, 同时能熟练地进行一般式与其他形式的互化

【重点】直线一般式方程的表示形式及其与其他形式的互化

【难点】直线一般式方程的应用

【复习引入】

1. 写出直线各种形式的方程, 说出里面各字母的含义:

(1) 点斜式: _____

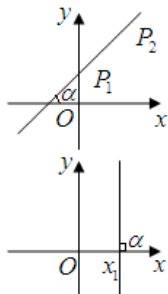
(2) 斜截式: _____

(3) 两点式: _____

(4) 截距式: _____

★问题 1: 直线的点斜式、斜截式、两点式、截距式方程都是关于 x, y 的二元一次方程, 那么直线和二元一次方程之间有什么样的关系呢?

【引导思考 1】: 平面直角坐标系中的每一条直线都可以用一个关于 x, y 的二元一次方程表示吗?



【引导思考 2】: 每一个关于 x, y 的二元一次方程 $Ax + By + C = 0$ (A, B 不同时为 0) 都表示一条直线吗?

我们把关于 x, y 的二元一次方程 _____

(A, B 不同时为 0) 叫做直线的 _____ 式方程.

【练习 1】 已知直线经过点 $A(6, -4)$, 斜率为 $-\frac{4}{3}$, 则直线的点斜式方程为: _____, 一般式方程为: _____, 斜截式方程为: _____, 截距式方程为: _____.

★问题 2: 直线方程一般式中的系数 A, B, C 有什么意义吗? 它们与直线的斜率、截距之间又有什么关系? 如何转化?

【练习 2】 在方程 $Ax + By + C = 0$ 中, A, B, C 为何值时, 方程表示的直线分别满足下列条件:

- ① 平行于 x 轴;
- ② 平行于 y 轴;
- ③ 与 x 轴重合;
- ④ 与 y 轴重合.

【练习 3】 对于直线 $Ax + By + C = 0$,

(1) 当 $B \neq 0$ 时, 可化为斜截式为: _____, 其斜率为 _____, 在 y 轴上的截距为 _____;

(2) 当 $B = 0$ 且 $A \neq 0$ 时, 他表示一条与 y 轴 _____ 的直线, 在 x 轴上的截距为 _____;

(3) 当 $A, B, C \neq 0$ 时, 可化为截距式为: _____, 在 x, y 轴上的截距分别为 _____、_____.

★问题 3: 直线的五种形式的方程可以互相转化吗? 它们是怎样进行转化的?

【练习 4】 把直线 l 的一般方程 $x - 2y + 6 = 0$ 化成斜截式为: _____, 化成截距式为: _____.

★问题 4: 回忆一下, 你能说出直线的五种形式的各自的内容和适用条件吗?

	需要给定条件	直线方程	适用条件
点斜式			
斜截式			
两点式			
截距式			
一般式			

☆注：两种常见的直线系方程

1. 平行直线系： $y = kx + b$ (k 为常数, b 为参数)
2. 点线系： $y - y_1 = k(x - x_1)$ (k 为参数, 定点 $P(x_1, y_1)$)

★问题 5： 两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, ($A_1B_1 \neq 0, A_2B_2 \neq 0$)

当满足_____时, $l_1 \parallel l_2$;

当满足_____时, $l_1 \perp l_2$.

当满足_____时, l_1 与 l_2 关于直线 $x = a$ 轴对称.

【例一】 根据下列各条件写出直线的方程, 并且化成一般式.

- (1) 斜率是 $-\frac{1}{2}$, 经过点 $A(8, -2)$;
- (2) 经过点 $B(4, 2)$, 平行于 x 轴;
- (3) 在 x 轴、 y 轴上的截距分别是 $-3, -1$;
- (4) 经过 $A(-1, 5), B(2, -1)$ 两点.

【例二】(1) 直线 $2x - y - 2 = 0$ 绕它与 y 轴的交点 A 按逆时针方向旋转 90° 所得的直线方程是()

- A. $x - 2y + 4 = 0$ B. $x + 2y - 4 = 0$
C. $x - 2y - 4 = 0$ D. $x + 2y + 4 = 0$

(2) 一条光线从点 $A(2, 4)$ 射出, 倾斜角为 60° , 遇 x 轴后反射, 则反射光线的直线方程为()

- A. $\sqrt{3}x - y + 4 - 2\sqrt{3} = 0$
B. $x - \sqrt{3}y - 2 - 4\sqrt{3} = 0$
C. $\sqrt{3}x + y + 4 - 2\sqrt{3} = 0$
D. $x + \sqrt{3}y - 2 - 4\sqrt{3} = 0$

(3) 若方程 $(m^2 - 3m + 2)x + (m - 2)y - 2m + 5 = 0$ 表示直线.

(1) 求实数 m 的范围;

(2) 若该直线的斜率 $k = 1$, 求实数 m 的值.

【例三】(1) 已知直线 $l_1: 2x + (m + 1)y + 4 = 0$ 与直线 $l_2: mx + 3y - 2 = 0$ 平行, 求实数 m 的值;

(2) 已知直线 $l_1: (a + 2)x + (1 - a)y - 1 = 0$ 与直线 $l_2: (a - 1)x + (2a + 3)y + 2 = 0$ 垂直, 求实数 a 的值.

【例四】(2020 武威一中高一期末) 当 $0 < a < 2$ 时, 直线 $l_1: ax - 2y = 2a - 4$ 与 $l_2: 2x + a^2y = 2a^2 + 4$ 和两坐标轴围成一个四边形, 问 a 取何值时, 这个四边形面积最小, 并求这个最小值.

2.3.1 两条直线的交点坐标

2.3.2 两点间的距离公式

【学习目标】

1. 理解两条直线的交点坐标是由它们对应的方程组的解来确定的, 会根据方程组的解的个数来判断两直线的位置关系

2. 理解过两直线交点的直线系方程, 并会用它解决相关问题.

【重点】直线的交点坐标与方程组的解之间的对应关系与直线交点坐标的计算

【难点】过两直线交点的直线系方程形式的认识

【复习引入】

设两条直线的方程是 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, 如果这两条直线相交, 由于交点同时在这两条直线上, 交点的坐标一定是这两个方程的_____ ; 反之, 如果这两个二元一次方程只有一个公共解, 那么以这个解为坐标的点一定是_____.

★问题 1: 已知两条直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$, ($A_1B_1 \neq 0, A_2B_2 \neq 0$) 相交, 如何求这两条直线交点的坐标?

几何元素及关系	代数表示
点A	$A(a, b)$
直线 l	$l: Ax + By + C = 0$
点A在直线 l 上	
直线 l_1 与 l_2 的交点是A	

☆结论: 用代数方法求两条直线的交点坐标, 只需_____.

★问题 2: 直线的位置关系与方程组的解之间有什么样的关系? 怎样判断两直线的位置关系?

方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

一组

无数组

无解

的解

两条直线 l_1, l_2 的公共点

直线 l_1, l_2 间的位置关系

【练习 1】已知直线 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 和 $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ($A_1B_1C_1 \neq 0, A_2B_2C_2 \neq 0$)

(1) 若 l_1 与 l_2 相交, 则_____;

(2) 若 $l_1 \parallel l_2$, 则_____;

(3) 若 l_1 与 l_2 重合, 则_____;

(4) 若 $l_1 \perp l_2$, 则_____.

【练习 2】判断下列各对直线的位置关系, 如果相交, 求出交点的坐标:

(1) $l_1: 2x - 3y = 7, l_2: 4x + 2y = 1$;

(2) $l_1: 2x - 6y + 4 = 0, l_2: y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$;

(3) $l_1: (\sqrt{2} - 1)x + y = 3, l_2: x + (\sqrt{2} + 1)y = 2$.

【练习 3】直线 l 经过原点, 且经过直线 $2x - 2y - 1 = 0$ 与直线 $6x - 4y + 1 = 0$ 的交点, 求直线 l 的方程.

解法一:

解法二:

★问题 3: 当 λ 变化时, 方程 $3x + 4y - 2 + \lambda(2x + y + 2) = 0$ 表示什么图形? 图形有何特点?

【探究】当 $\lambda=0$ 时, 直线为:

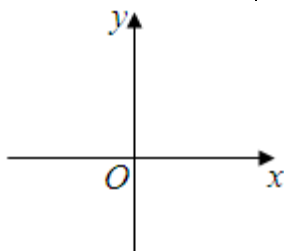
当 $\lambda=1$ 时, 直线为:

当 $\lambda=-1$ 时, 直线为:

当 $\lambda=2$ 时, 直线为:

.....

你的猜想: _____



☆ 结论: 过直线 $l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$ 及 $l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$ 的交点的直线方程可写为:

它包括直线 l_1 ($\lambda=0$) 但不包括直线 l_2 .

【练习3】求经过 $2x+y+8=0$ 和 $x+y+3=0$ 的交点, 且与直线 $2x+3y-10=0$ 垂直的直线方程.

★问题4: 已知平面上两点

两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$,

如何求 P_1, P_2 的距离

$|P_1P_2|$?

推导一: (向量方法)

推导二: (勾股定理方法)

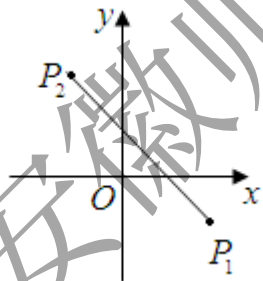
平面上两点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式

$|P_1P_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.

特别地, 当 P_1, P_2 所在直线与 x 轴平行时,

$|P_1P_2| = \underline{\hspace{2cm}}$; 当 P_1, P_2 所在直线与 y 轴平行

时, $|P_1P_2| = \underline{\hspace{2cm}}$.



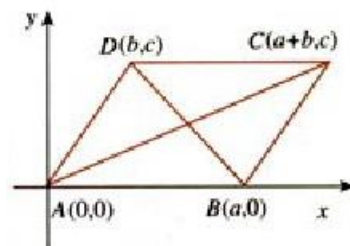
【例一】(1) 光线自点 $A(-3, 3)$ 射出, 经 x 轴反射以后过点 $B(2, 5)$, 则光线自点 A 到 B 所经过的路程 _____.

(2) 已知点 $A(4, 12)$, 在 x 轴上的点 P 与点 A 的距离等于 13, 求点 P 的坐标.

(3) 已知点 $A(-3, 4), B(2, \sqrt{3})$, 在 x 轴上找一点 P , 使 $|PA|=|PB|$, 并求 $|PA|$ 的值.

【例二】证明平行四边形四条边的平方和等于两条对角线的平方和.

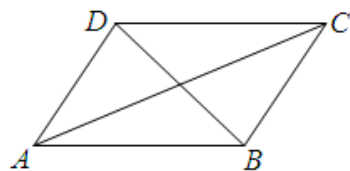
解法一:



【思考1】: 本题的解题方法有什么特点? 反映了什么样的数学思想?

【思考2】: 在本题中, 你是否还有其他建立直角坐标系的方法?

解法二:



【思考3】: 你能体会适当建立坐标系对证明的重要性吗?

★问题2: 请归纳出用解析法证明几何问题的一般步骤?

答: 用解析法证明几何问题的一般步骤是:

(1) 根据题设条件, 建立 _____, 用 _____ 表示有关的量 (如点、直线、线段长等)

(2) _____

(3) 把计算出来的代数结果 “_____” 成 _____, 即得出相关的结论.

2.3.3~4 点到直线、平行直线间的距离公式

学习目标

1. 了解点到直线距离公式的几种推导方法, 理解两条平行线间的距离的本质就是点到直线的距离
2. 熟练运用点到直线的距离公式求解点到直线的距离、平行线间的距离的相关计算问题

【复习引入】

1. 平面上两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 间的距离公式

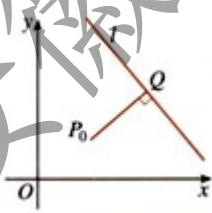
$$|P_1P_2| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$= \underline{\hspace{2cm}} \text{ (第二公式).}$$

★问题 1: 上节课我们学习了平面上两点间的距离公式, 可以用来求解任意两点间的距离, 那么已知点 $P_0(x_0, y_0)$ 和直线 $l: Ax + By + C = 0$, 如何求点 P_0 到直线 l 的距离呢?

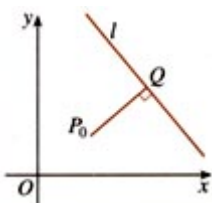
【探究】: 求点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离.

方法一: (点点距离法)

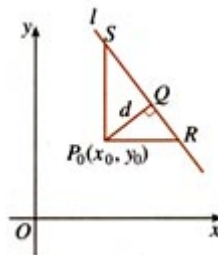


★问题 2: 上述方法虽然思路十分自然, 但具体运算较繁, 有没有更为简便的推导方法?

方法二: (代数方法)



方法三: (面积转化法)



点到直线的距离公式:

因此, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离

$$d = \underline{\hspace{2cm}}$$

【思考 1】: 当 $A=0$ 或 $B=0$ 时, 上述公式是否成立? 此时还有其它方法吗?

【思考 2】: 用点到直线的距离公式求点 $P(1, 2)$ 到直线 $l: x - y - 1 = 0$ 的距离

【练习】点 $P_0(3, -2)$ 到直线 $l: 3x - 4y + 1 = 0$ 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 到直线 $y = 6$ 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$, 到直线 $x = 0$ 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

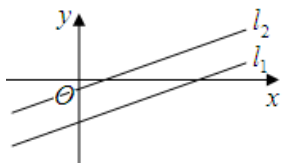
★问题 3: 设直线 $l_1 \parallel l_2$, 如何求 l_1 与 l_2 间的距离?

【例一】求证: 两条平行线 $Ax + By + C_1 = 0$ 与 $Ax + By + C_2 = 0$ ($C_1 \neq C_2$) 之间的距离是:

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

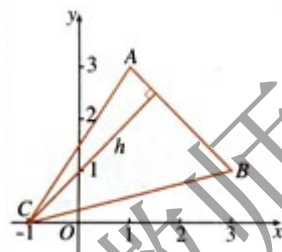
(4) 求与直线 $l: 5x - 12y + 6 = 0$ 平行且到 l 的距离为 2 的直线的方程.

【小练习】: 已知两条平行直线 $l_1: 2x - 7y - 8 = 0$, $l_2: 6x - 21y - 1 = 0$, 如何求 l_1 与 l_2 间的距离?



【思考 3】: 上述求解的过程中用到了数学中的什么思想?

【例二】 已知点 $A(1,3), B(3,1), C(-1,0)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.



【点评】: 对于面积问题, 除了用直接求法也可以用间接求法, 即_____法.

【例二】(1) 已知 O 为原点, 点 P 在直线 $x + y - 1 = 0$ 上运动, 那么 $|OP|$ 的最小值为()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

(2) 若 $P(x, y)$ 在直线 $x + y - 4 = 0$ 上, 则 $x^2 + y^2$ 的最小值是()

- A. 8 B. $2\sqrt{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. 16

(3) 若 $P(x, y)$ 在直线 $x + y - 4 = 0$ 上, 则 $\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$ 的最小值为_____.

【例三】 若动点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ 分别在直线 $l_1: x - y - 5 = 0$, $l_2: x - y - 15 = 0$ 上移动, 则 P_1P_2 的中点 P 到原点的距离的最小值是()

- A. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ B. $5\sqrt{2}$ C. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ D. $15\sqrt{2}$

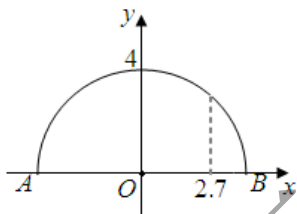
【例四】 已知直线 l 过点 $A(1,2)$, 且原点到直线 l 的距离为 1, 求直线 l 的方程.

【例五】 (2020 · 江西省赣州市高一期末) 过点 $A(1,2)$ 且与点 $P(3,2)$ 距离最大的直线方程是_____.

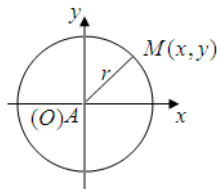
【例六】 (2020 · 辽宁省鞍山市高一期末) 已知直线 l 在两坐标轴上的截距相等, 且点 $P(1,3)$ 到直线 l 的距离为 $\sqrt{2}$, 则直线 l 的方程为_____.

【例七】 已知直线 l 过点 $M(1, 2)$. 若它被两平行直线 $4x + 3y + 1 = 0$ 与 $4x + 3y + 6 = 0$ 所截得的线段长为 $\sqrt{2}$, 则直线 l 的方程为_____.

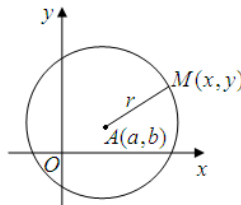
【难点】圆心与半径的确定方法



【引导思考 1】: 若圆心 (点) A 在坐标原点上, 半径为 r 的圆的方程是什么?



方法一：坐标法



方法二：图形变换法

方法三：向量平移法

设圆的圆心是 $A(a, b)$ ，半径为 r ，则圆的标准方程是_____；特别地，当圆心在坐标原点上，圆的半径为 r ，则圆的标准方程为_____。

(1) $x^2 + y^2 = 2$;

(2) $(x+2)^2 + (y+1)^2 = m^2 (m \neq 0)$;

【练习 2】方程 $y-1=\sqrt{4-(x+1)^2}$ 表示的图形是 ()

- A. 圆 B. 半圆
C. 四分之一圆 D. 直线

☆ 几种特殊位置的圆的方程

给定条件	圆的方程
圆心在原点， 半径为 r	
圆心为 (a,b) ， 过原点	
圆 心 在 x 轴 上 $(a,0)$ ，半径为 r	
圆 心 在 y 轴 上 $(0,b)$ ，半径为 r	
圆 心 在 x 轴 上 $(a,0)$ ，且过原点	

圆心在 y 轴上 (0, b), 且过原点	
圆心为 (a, b) , 且与 x 轴相切	
圆心为 (a, b) , 且与 y 轴相切	
圆心为 (a, b) , 且与两坐标轴都相切	

★问题4: 点和圆有几种位置关系? 分别满足什么条件? 如何判断一点是否在圆上? 圆内? 圆外?

☆几何方法:

设点 P 到圆心的距离为 d , 圆的半径为 r , 点 P 在圆上 $\Leftrightarrow$ _____; 点 P 在圆外 $\Leftrightarrow$ _____; 点 P 在圆内 $\Leftrightarrow$ _____.

☆代数方法:

【思考1】: 点 $M_0(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上的条件是什么? _____
在圆内呢? _____
在圆外呢? _____

【例一】求证: 若已知圆直径端点的坐标分别是 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 则所求圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0.$$

【例二】(1) 若 $P(2, -1)$ 为圆 $(x-1)^2 + y^2 = 25$ 的弦 AB 的中点, 则直线 AB 的方程是()

- A. $x-y-3=0$ B. $2x+y-3=0$
C. $x+y-1=0$ D. $2x-y-5=0$

(2) 已知点 $M(5\sqrt{a}+1, \sqrt{a})$ 在圆 $(x-1)^2 + y^2 = 26$ 的内部, 则 a 的取值范围是_____.

(3) 已知某圆圆心在 x 轴上, 半径为 5, 且截 y 轴所得线段长为 8, 则该圆的标准方程为_____.

(4) 以点 $(2, -1)$ 为圆心且与直线 $x+y=6$ 相切的圆的方程是_____.

(5) (2020·山东省济南市期中) 若圆 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ 上相异两点 P, Q 关于直线 $kx+2y-4=0$ 对称, 则 k 的值为_____.

(6) (多选题) 若经过点 $P(5m+1, 12m)$ 可以作出圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 则实数 m 的取值可能是()

- A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{13}$ C. $-\frac{1}{13}$ D. $-\frac{1}{2}$

【例三】求圆心在直线 $x-2y-3=0$ 上, 且过点 $A(2, -3), B(-2, -5)$ 的圆的标准方程.

【例四】(1) 已知 $\triangle AOB$ 的顶点坐标分别是 $A(4, 0), B(0, 3), O(0, 0)$, 则 $\triangle AOB$ 外接圆的方程为_____.

(2) $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别是 $A(5, 1), B(7, -3), C(2, -8)$, 求它的外接圆的方程.

【点评】: 确定圆的方程的主要方法是待定系数法, 即列出关于 a, b, r 的方程组求 a, b, r , 或直接求出圆心 (a, b) 和半径 r , 一般步骤为: 设 $\rightarrow$ 列 $\rightarrow$ 解 $\rightarrow$ 代.

2.4.2 圆的一般方程

【学习目标】

1. 掌握圆的一般方程及其特点, 理解在什么条件下方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 表示一个圆
2. 会用配方法将圆的一般方程化为圆的标准方程, 并指出圆的圆心坐标与半径大小, 并会用待定系数法求解过三点的圆的一般方程
3. 理解轨迹的意义, 会求解相关动点问题的轨迹方程

【重点】圆的一般方程的特点及它与标准方程的互化

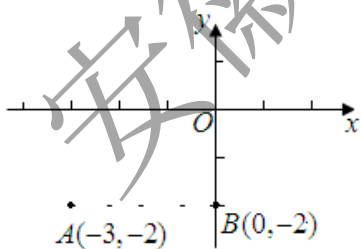
【难点】轨迹方程相关问题的求解思想

【复习引入】

1. 设圆的圆心是 $A(a, b)$, 半径为 r , 则圆的标准方程是_____.
2. 以 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 为直径端点的圆的方程为:_____.

【探究问题】: 已知点 $A(-3, -2)$ 和 $B(0, -2)$, 现在平面直角坐标系上有一动点 $M(x, y)$, 且满足

$$\frac{|AM|}{|BM|} = 2, \text{ 求动点 } M \text{ 的轨迹曲线的方程.}$$



★问题 1: 上面求出的曲线方程表示什么图形?

答:

★问题 2: 方程 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ 表示什么图形? 方程 $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$ 呢?

答:

★问题 3: 方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 在什么条件下表示圆呢?

对于方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,

(1) 当_____时, 方程表示的曲线为圆, 此时圆心坐标为_____, 半径等于_____;

(2) 当 $D^2 + E^2 - 4F = 0$ 时, 方程表示_____, 该点的坐标为_____;

(3) 当_____时, 方程不表示任何图形.

☆注: 当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时, 上述方程叫做圆的一般方程.

★问题 4: 我们发现, 圆的一般方程本质上就是一个二元二次方程, 那么任意一个二元二次方程 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 都表示圆吗? 如果不能, 需具备哪些条件才能表示一个圆?

答:

☆结论: 二元二次方程需具备以下条件 (才表示圆):

(1) x^2 和 y^2 的系数_____, 且不等于 0, 即_____;

(2) 没有 xy 项, 即_____;

(3) _____.

★问题 5: 圆的一般方程与前面所学圆的标准方程各有什么特点, 它们之间可以互化吗?

【练习 1】: 求下列各圆的半径和圆心坐标:

(1) $x^2 + y^2 - 6x = 0$;

(2) $x^2 + y^2 + 2by - 2b^2 = 0$.

【练习 2】: 如果将圆的标准方程 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2$ 化为一般式, 则 $D=$ _____, $E=$ _____, $F=$ _____.

【练习3】: (上海卷) 已知圆 $x^2 - 4x + y^2 - 4 = 0$ 的圆心是点 P, 则点 P 到直线 $x - y = 0$ 的距离是 _____.

【例一】 (1) 方程 $x^2 + y^2 + 4mx - 2y + 5m = 0$ 表示圆的条件是 ()

A. $\frac{1}{4} < m < 1$

B. $m > 1$

C. $m < \frac{1}{4}$

D. $m < \frac{1}{4}$ 或 $m > 1$

(2) 判断方程 $x^2 + y^2 - 4mx + 2my + 20m - 20 = 0$ 能否表示圆. 若能表示圆, 求出圆心和半径.

【例二】 点 A 是圆 $C: x^2 + y^2 + ax + 4y - 5 = 0$ 上任意一点, A 点关于直线 $x + 2y - 1 = 0$ 的对称点也在圆 C 上, 求实数 a 的值.

【例三】 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别是 $A(2, 2)$, $B(5, 3)$, $C(3, -1)$, 求它的外接圆的方程, 并写出圆心 P 的坐标.

【例四】 (1) 已知圆 $(x+1)^2 + y^2 = 2$ 上动点 A, x 轴上定点 $B(2, 0)$, 将 BA 延长到 M, 使 $AM = BA$, 求动点 M 的轨迹方程.

【点评】: 求轨迹方程的步骤:

① 建立适当的直角坐标系, 用 (x, y) 表示轨迹 (曲线)

上任一点 M 的坐标;

② 列出关于 x, y 的方程;

③ 把方程化为最简形式;

④ 除去方程中的瑕点 (即不符合题意的点);

⑤ 作答.

(2) 一条线段 AB ($AB = 2a$) 的两个端点 A 和 B 分别在 x 轴和 y 轴上滑动, 则线段 AB 的中点 M 的轨迹方程为 _____.

【例五】 (1) 已知点 $O(0, 0)$ 在圆 $x^2 + y^2 + kx + 2ky + 2k^2 + k - 1 = 0$ 外, 则 k 的取值范围为 _____.

(2) 若直线 $l: ax + by + 1 = 0$ 始终平分圆 $M: x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$ 的周长, 则 $(a-2)^2 + (b-2)^2$ 的最小值为 ()

A. $\sqrt{5}$

B. 5

C. $2\sqrt{5}$

D. 10

(3) 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$, 则 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 的最大值是 _____.

(4) 在圆 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 内, 过点 $E(0, 1)$ 的最长弦和最短弦分别为 AC 和 BD, 则四边形 ABCD 的面积为 _____.

【例六】 求经过点 $A(-2, -4)$ 且与直线 $l: x - 3y - 2 = 0$ 相切于点 $B(8, 6)$ 的圆的方程.

2.4.3 直线与圆的位置关系

【学习目标】

1. 了解直线与圆的三种位置关系，会用几何法(d 与 r 的关系)、代数法(直线方程与圆的方程解的组数)来判断直线与圆的位置关系
2. 理解和掌握直线和圆的三种位置关系与相应的直线和圆的方程所组成的二元二次方程组的解的对应关系，会用方程思想处理直线与圆相交、相切时的有关问题

【重点】 直线与圆的位置关系的判断方法及切线方程的求解

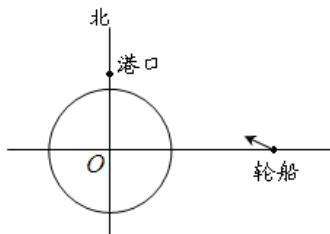
【难点】 灵活运用所学知识处理直线与圆的相关问题

【复习】:

1. 对于方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ，当 _____ 时，方程表示的曲线为圆，此时圆心坐标为 _____，半径等于 _____，我们把它叫做圆的一般方程。
2. 点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离 $d =$ _____

【情景引入】

一个小岛的周围有环岛暗礁，暗礁分布在以小岛中心为圆心，半径为 20km 的圆形区域内，已知小岛中心位于轮船正西 40km 处，港口位于小岛中心正北 30km 处，如果轮船沿直线返航，那么它是否会有触礁危险？



★问题 1: 这个问题的本质是什么？如果建立坐标系，将几何问题代数化处理？

★问题 2: 在初中怎样判断直线与圆的位置关系？

设圆心到直线的距离为 d ，圆的半径为 r ，则

_____ $\Leftrightarrow$ 直线与圆相交 $\Leftrightarrow$ 有两个公共点；

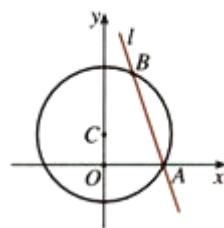
_____ $\Leftrightarrow$ 直线与圆相切 $\Leftrightarrow$ 只有一个公共点；

_____ $\Leftrightarrow$ 直线与圆相离 $\Leftrightarrow$ 没有公共点

【探究一】直线与圆的位置关系的判断

【例一】 如图，已知直线 $l: 3x + y - 6 = 0$ 和圆心为 C 的圆 $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ ，判断直线 l 与圆的位置关系；如果相交，求它们交点的坐标。

方法一：(几何方法)



★问题 3: 在上述直角坐标系中，直线与圆都有各自的方程，能否直接用它们的方程判断它们之间的位置关系呢？

【引导思考】：类比直线与直线交点个数判定方法，如何快速判断直线与圆的交点的个数呢？

方法二：(代数方法)

★归纳： 由 $\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \end{cases}$ 消去 x 或 y ，得

到一元二次方程的判别式 Δ ，有

_____ $\Leftrightarrow$ 方程组有两组解 $\Leftrightarrow$ 直线与圆相交；

_____ $\Leftrightarrow$ 方程组只有一组解 $\Leftrightarrow$ 直线与圆相切；

_____ $\Leftrightarrow$ 方程组无解 $\Leftrightarrow$ 直线与圆相离

【练习 1】：判断下列各组直线 l 与圆 C 的位置关系：

① $l: 3x + 4y + 2 = 0$ ，圆 $C: x^2 + y^2 - 2x = 0$ ；

② $l: x + y + 3 = 0$ ，圆 $C: x^2 + y^2 - 2y = 0$ 。

〔练习2〕: 已知圆 C 的方程为 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, 直线 l 的方程为 $kx - y - 2 = 0$, 问 k 为何值时, 直线 l 与圆 (1) 有两个公共点;

(2) 只有一个公共点;

(3) 没有公共点?

★问题 4: 回到情景引入提出的问题, 你能用以上两种方法求解吗?

解: _____

用坐标法解决平面几何问题的“三步曲”

第一步: 建立适当的平面直角坐标系, 用坐标和方程表示问题中的几何元素, 如点、直线, 将平面几何问题转化为代数问题.

第二步: 通过代数运算, 解决代数问题.

第三步: 把代数运算结果“翻译”成几何结论.

★问题 5: 如果圆与直线相交(切), 如何求解交(切)点的坐标?

【例二】(1) 过点 $A(4, -3)$ 作圆 $C: (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$ 的切线, 求此切线的方程.

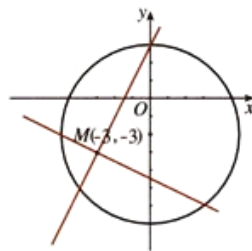
(2) 〔接例一〕求直线 $l: 3x + y - 6 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$ 截得的弦长.

〔点评〕直线与圆相交时的弦长求法

几何法	利用圆的半径 r , 圆心到直线的距离 d , 弦长 l 之间的关系 $r^2 = d^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$ 解题
代数法	若直线与圆的交点坐标易求出, 求出交点坐标后, 直接用两点间距离公式计算弦长
弦长公式法	设直线 $l: y = kx + b$ 与圆的两交点为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 将直线方程代入圆的方程, 消元后利用根与系数的关系得弦长 $l = \sqrt{1+k^2} x_1 - x_2 = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]}$

【例三】(1) 求直线 $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 = 4$ 截得的弦长.

(2) 已知过点 $M(-3, -3)$ 的直线 l 被圆 $x^2 + y^2 + 4y - 21 = 0$ 所截得的弦长为 $4\sqrt{5}$, 求直线 l 的方程.



【例四】(1) 设某村庄外围成圆形, 其所在曲线的方程可用 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ 表示, 村外一小路方程可用 $x - y + 2 = 0$ 表示, 则从村庄外围到小路的最短距离是_____.

(2) 在直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 上求一点 P , 使 P 到圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线长最短, 并求此时的切线长.

【例五】已知圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$, 求经过圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线的方程.

〔点评〕: 经过圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为:

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$

2.4.4 圆与圆的位置关系

【学习目标】

1. 了解两圆间的位置关系与方程组解的情况之间的对应关系, 会根据两圆的圆心距与半径之间的关系迅速判断出两圆的位置关系

2. 理解过圆(直线)与圆交点的圆系方程的特征, 会利用圆系方程处理相关圆与圆的问题, 会求两圆相交弦所在的直线方程

【重点】用几何法判定圆与圆的位置关系与用平面几何知识解决圆与圆的相关问题

【难点】圆系方程的特征与应用

【复习引入】

1. 直线与圆的位置关系的判断方法

设圆心到直线的距离为 d , 圆的半径为 r , 方程组消元后得到一元二次方程的判别式 Δ , 则有:

直线与圆

相交 $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ 有两个公共点;

相切 $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ 只有一个公共点;

相离 $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ 没有公共点

2. 圆与圆的位置关系的判断方法

设两个圆的半径分别为 r_1 和 r_2 , 圆心距为 d , 则

两圆相离 $\Leftrightarrow$ _____

两圆相切 $\Leftrightarrow$ _____

两圆相交 $\Leftrightarrow$ _____

3. 两圆外离时有 _____ 条公切线,

外切时有 _____ 条公切线,

相交时有 _____ 条公切线,

内切时只有 _____ 条公切线,

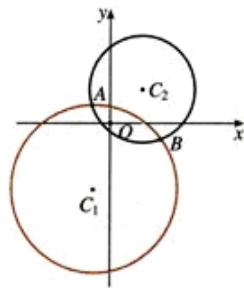
内含时 _____ 公切线.

★问题 1: 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$, 试判断圆 C_1 与圆 C_2 的位置关系?

方法一: (几何方法)

★问题 2: 初中我们可以根据两圆的半径与圆心距之间的关系判断两圆的位置关系, 而前面我们学习了圆的方程, 是否可以根据两个圆的方程来判断它们之间的位置关系呢?

方法二: (代数方法)



★问题 3: 如何求上述圆 C_1 与圆 C_2 的交点坐标? 请求出两交点的坐标, 并求出过两个交点的直线的一般式方程, 你有什么发现? 你能说明为什么吗?

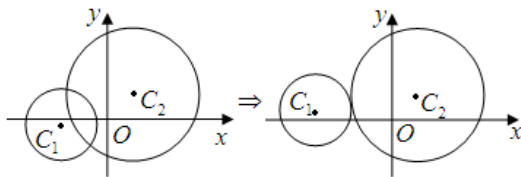
★归纳: 设圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$,

圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$,

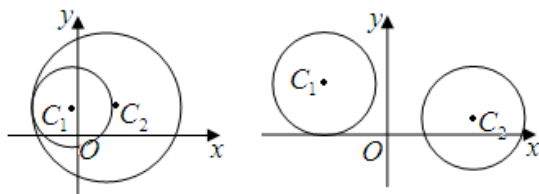
若圆 C_1 与圆 C_2 相交, 则相交弦所在直线的方程为:

【练习 1】: 过两圆 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 13$ 及 $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 的交点的直线方程的一般式为 _____.

【思考 1】: 若圆 C_1 与圆 C_2 外切, 上述方程表示的直线与两圆之间有怎样的位置关系? 请在下右图中画出这条直线.



【思考 2】: 若圆 C_1 与圆 C_2 内切, 上述方程表示的直线与两圆之间又有怎样的位置关系? 请在下左图中画出这条直线.



【思考 3】: 若圆 C_1 与圆 C_2 半径相等, 则上述方程表示的直线与两心之间又有怎样的位置关系? 说明理由, 并在上右图中画出这条直线.

★问题 4: 设圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 相交, 交点为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 那么方程

$$x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

($\lambda \neq -1$) 表示什么图形? 这些图形有什么共同的特征?

【引导思考 1】: 点 A、B 与所求图形曲线之间什么关系?

【引导思考 2】: 类比过两直线交点的点线系方程 $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, 你能得到什么结论?

圆系方程 1: 若圆 $C_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 有公共点, 则经过它们的公共点的圆系方程为 _____
(其中 $\lambda \neq -1$, 且此圆系中不包括 C_2)

★问题 5: 如果直线 $l: Ax + By + C = 0$ 和圆 $C: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 相交, 交点为 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 那么过 A、B 两点的圆系方程怎么表示?

圆系方程 2: 若直线 $Ax + By + C = 0$ 和圆 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 有公共点, 则经过它们的公共点的圆系方程为 _____

【练习 2】: 求经过圆 $x^2 + y^2 + 3x - y = 0$ 和

$3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0$ 的交点及点 P (1,1) 的圆的方程.

【例一】(多选题) 若圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 8y - k = 0$ 没有公共点, 则实数 k 的取值可能是 ()

A. -16 B. -9 C. 11 D. 12

(2) 到点 $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ 的距离分别为 3 和 1 的直线有 _____ 条.

【例二】(1) 求圆 $x^2 + y^2 - 4 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 12 = 0$ 的公共弦所在的直线方程及公共弦长.

(2) 过圆 $x^2 + y^2 = 4$ 外一点 $M(4, -1)$ 引圆的两条切线, 则经过两切点的直线方程为 ()

A. $4x - y - 4 = 0$ B. $4x + y - 4 = 0$
C. $4x + y + 4 = 0$ D. $4x - y + 4 = 0$

【点评】: 经过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 外一点 $M(x_0, y_0)$ 做圆的两条切线, 切点分别为 A、B, 则切点弦方程为:

$$x_0x + y_0y = r^2.$$

【练习 3】: 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 过点 P 向圆 C 引两条切线 PA, PB, 切点为 A, B, 若点 P 的坐标为 (2, 1), 则直线 AB 的方程为 _____; 若 P 为直线 $x + 2y - 4 = 0$ 上一动点, 则直线 AB 经过定点 _____.

【例三】求过点 (0, 6) 且与圆 $x^2 + y^2 + 10x + 10y = 0$ 切于原点的圆的方程.

选择性必修1 第三章、圆锥曲线的方程

3.1 椭圆及其标准方程

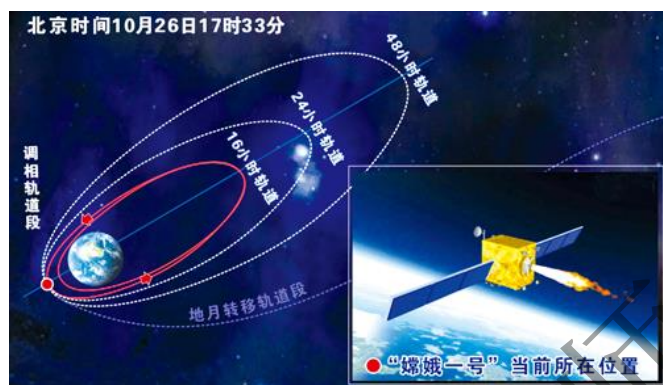
【学习目标】

1. 通过亲手画椭圆，理解并掌握椭圆的定义，理解椭圆上一点到两定点距离和大于焦距的几何意义
2. 经历椭圆标准方程的推导过程，培养自己的计算能力与求简意识，并能体会与欣赏数学的“简洁美”
3. 感知建立适当的坐标系对解决问题带来的简便性

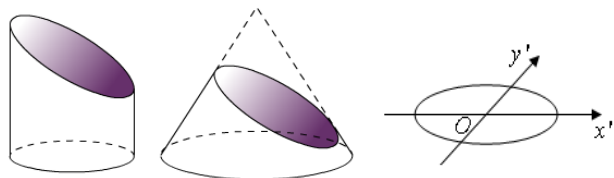
【重点】掌握椭圆的定义及标准方程，理解坐标法的基本思想

【难点】椭圆标准方程的推导与化简

【情境引入】

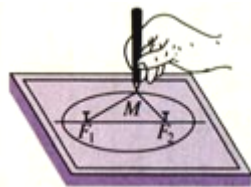


从上图可以发现，嫦娥一号的 16 小时轨道、24 小时轨道、48 小时轨道都是什么形状的？而在生活中，这种形状的曲线也是很常见的，如下图，用一个平面斜着去截圆柱和圆锥，得到的截面图形是不是这种形状呢？还有圆的直观图是不是也是的？你还能例举出哪些地方也有呢？



【动手】取一条定长的细绳，把它的两端都固定在图板的同一点处，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖（动点）画出的轨迹是一个圆。如果把细绳的两端拉开一段距离，分别固定在图板的两点处，套上铅笔，拉紧绳子，移动笔尖画出的轨迹又是什么图形呢？

答：_____



★问题 1：在刚才的作图过

程中，都有哪些运动的点和固定的点、变化的量和不变的量？

答：运动的点和变化的量有：_____

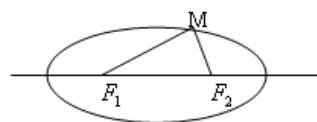
固定的点和不变的量有：_____

★问题 2：假设点 F_1 与 F_2 之间的距离为 4，若给定的绳子的长度分别是 6、4、3 时，动点 M 所形成的轨迹分别是什么图形？

答：绳长为 6 时得到的图形是_____，

绳长为 4 时得到的图形是_____，

绳长为 3 时_____。



椭圆的定义：

我们把平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的距离的和等于_____的点的轨迹叫做椭圆，这两个定点叫做椭圆的_____，两焦点间的距离叫做椭圆的_____。

★问题 3：在上述方法中，“（和）常数”要满足什么条件，才能保证画出的曲线是椭圆？

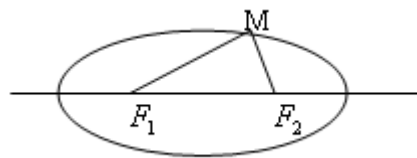
答：_____

★问题 4：若 $|F_1F_2| = 2c$ ， $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ ，你自己能否推导出椭圆的轨迹方程？

【引导思考 1】：求曲线方程的一般步骤是什么？

【引导思考 2】：该如何建立平面直角坐标系呢？

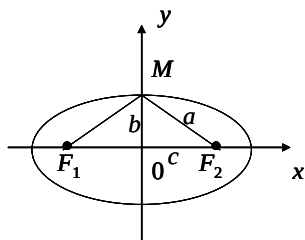
解：



【引导思考3】：经过艰辛的努力，你是否得到了式子 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ ，如果是，你成功了。但是这个式子并不简洁，式子中的 $(a^2 - c^2)$ 有什么几何意义？

☆提示：让点 M 运动到 y

轴正半轴上（如右图）



由曲线与方程的关系可知，以 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$ 为焦点（即焦距为 $2c$ ）， M 点到 F_1 、 F_2 距离之和等于定长 $2a$ 的椭圆的标准方程为：

【练习1】：若点 F_1 与 F_2 之间的距离为 4，给定的绳子的长度为 6，写出动点 M 所形成的椭圆方程？

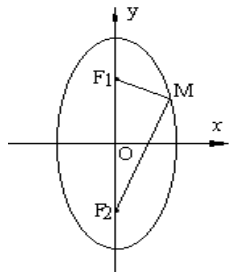
答：

★问题5：若以 F_1F_2 所在直线为 y 轴，以 F_1F_2 的垂直平分线为 x 轴建立坐标系，要想得到此时椭圆的方程，是否需要重复上述繁琐的化简过程？如何做？

椭圆标准方程：

(1) 焦点在 x 轴上：

(2) 焦点在 y 轴上：



★问题6：观察问题4和问题5得到的椭圆方程，说说椭圆的方程有什么特点？

(1) 椭圆标准方程形式：它们都是_____方程，左边是_____，右边是_____；

(2) 椭圆标准方程中三个参数 a ， b ， c 的关系：_____ ($a > b > 0$)；

(3) 椭圆焦点的位置由标准方程中分母的大小确定：若 x^2 项分母大，则焦点在_____轴上；若 y^2 项分母大，则焦点在_____轴上。

【例一】 下列哪些是椭圆的方程，如果是，判断它的焦点在哪个坐标轴上？并指明 a 、 b ，写出焦点坐标。

(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; (2) $9x^2 - 25y^2 - 1 = 0$;

(3) $25x^2 + \frac{y^2}{16} = 4$; (4) $\frac{x^2}{m^2} + \frac{x^2}{m^2 + 1} = 1 (m \neq 0)$.

【例二】 写出适合下列条件的椭圆的标准方程：

(1) 两个焦点的坐标分别是 $(-4, 0)$ 、 $(4, 0)$ ，椭圆上一点到两焦点距离的和等于 10. _____

(2) 两个焦点的坐标分别是 $(0, -4)$ 、 $(0, 4)$ ，椭圆上一点到两焦点距离的和等于 10. _____

(3) 两个焦点的距离为 8，椭圆上一点到两焦点距离的和等于 10. _____

【例三】 求适合下列条件的椭圆的标准方程：

① 两个焦点的坐标分别是 $(0, 5)$ 、 $(0, -5)$ ，椭圆上一点 P 到两焦点的距离之和为 26.

② 焦点在坐标轴上，且经过 $A(\sqrt{3}, -2)$ 和 $B(-2\sqrt{3}, 1)$ 两点.

③ 经过点 $(2, -3)$ 且与椭圆 $9x^2 + 4y^2 = 36$ 有共同的焦点。（一题多解）

3.1.2 椭圆的简单几何性质（学案）

【学习目标】

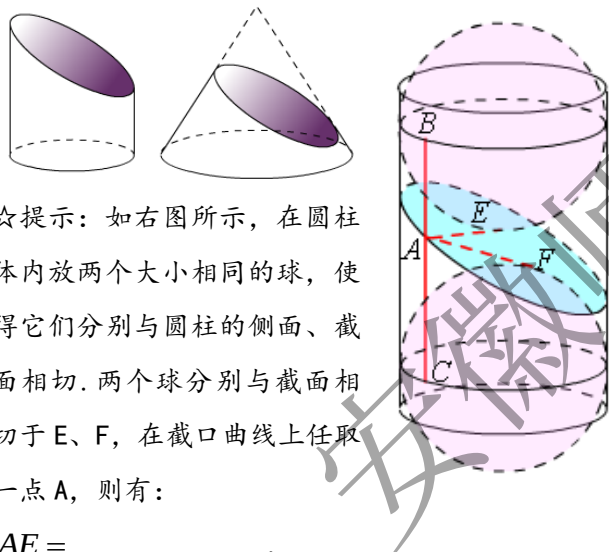
1. 能根据椭圆的图形直观感受到椭圆的范围、对称性及顶点, 并能通过椭圆方程角度来解释这些几何性质
2. 掌握离心率的概念及其几何意义, 能熟练的利用基本量求离心率和利用离心率求基本量
3. 掌握椭圆的几何性质, 并熟练掌握标准方程中 a, b, c, e 的几何意义及相互之间的关系

【重点】标准方程中 a, b, c, e 的几何意义及相互之间的关系

【难点】如何用离心率刻画椭圆的扁平程度

【情境引入】 为什么截口曲线是椭圆?

上节课我们学习了椭圆的定义, 也知道它常出现在我们的生活中, 如用一个平面斜着去截圆柱和圆锥, 得到的截面图形是椭圆, 那么你知道为什么“截口曲线”是椭圆形的呢? 请根据椭圆的定义进行证明.



☆提示: 如右图所示, 在圆柱体内放两个大小相同的球, 使得它们分别与圆柱的侧面、截面相切. 两个球分别与截面相切于 E, F , 在截口曲线上任取一点 A , 则有:

$$AE = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$AF = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\text{则 } AE + AF = \underline{\hspace{2cm}}.$$

所以, $\underline{\hspace{2cm}}$

☆思考: 你能仿照上述方法, 证明上图中圆锥的截口曲线也是椭圆吗?

【探究】 如何快速作出椭圆方程的曲线?

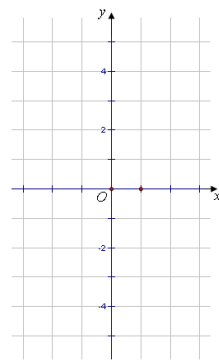
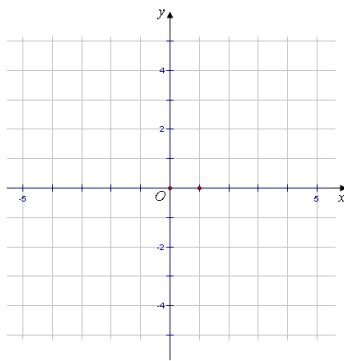
根据前面所学的有关知识, 画出下列方程表示的曲线

图形: (1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; (2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

☆思考 1: 用描点法作图时, 至少要描几个关键点?

x				
y				

x				
y				



☆思考 2: 为什么有四个点就能画椭圆的草图呢? 椭圆这种曲线有什么样的几何性质? 下面我们一起从取值范围、对称性、顶点等方面来研究椭圆的几何性质.

★问题 1: 观察椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的形状, 你能从图上看出横纵坐标的范围吗? 它具有怎样的对称性? 画椭圆曲线要依靠哪几个关键的点?

答: 范围: $\underline{\hspace{2cm}}$

对称性: $\underline{\hspace{2cm}}$

需要的关键点: $\underline{\hspace{2cm}}$

★问题 2: 你能用椭圆的标准方程(代数方法)来研究问题 1 中椭圆的几何性质吗?(取值范围、对称性、顶点)

1、椭圆落在 $x = \pm a, y = \pm b$ 组成的矩形中;

2、图形对称性的本质是构成图形的点的对称性. 对于标准方程表示的椭圆, 坐标轴是椭圆的对称轴, 原点是椭圆的对称中心, 椭圆的对称中心也叫做 $\underline{\hspace{2cm}}$.

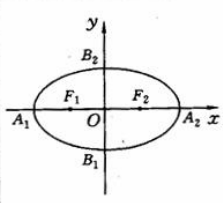
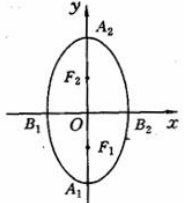
3、椭圆与坐标轴的四个交点叫做椭圆的 $\underline{\hspace{2cm}}$, 若交点在 x 轴上, 则椭圆截 x 轴得到的线段叫做椭圆的 $\underline{\hspace{2cm}}$, 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$; 截 y 轴得到的线段叫做 $\underline{\hspace{2cm}}$, 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

☆注: 椭圆截两坐标轴所得两条线段中长的为长轴, 短的为短轴, 而方程中的 a 与 b 分别叫做椭圆的半长轴长和 $\underline{\hspace{2cm}}$, c 叫做椭圆的 $\underline{\hspace{2cm}}$. (可结合圆的半径概念记忆)

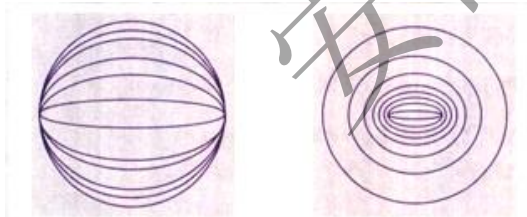
〔练习1〕: 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ 的长轴长为_____.

〔练习2〕: 求椭圆 $16x^2 + 25y^2 = 400$ 的长轴和短轴的长、焦点和顶点的坐标.

★问题3: 根据焦点在 x 轴上的椭圆的几何性质, 你能否归纳出焦点在 y 轴上的椭圆的几何性质? 填写下表.

焦点的位置	焦点在 x 轴上	焦点在 y 轴上
图形		
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$
范围	$-a \leq x \leq a$ 且 $-b \leq y \leq b$	
顶点	$A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, -b), B_2(0, b)$	$A_1(0, -a), A_2(0, a), B_1(-b, 0), B_2(b, 0)$
轴长	短轴长 $= 2b$, 长轴长 $= 2a$	
焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
焦距	$ F_1F_2 = 2c$	
对称性	关于 x 轴、 y 轴对称, $(0, 0)$ 为对称中心	

★问题4: 如下图, 观察不同的椭圆, 我们发现, 椭圆的扁平程度不一, 那么用什么量可以刻画椭圆的扁平程度呢?



〔引导思考〕: 能否利用 a, b, c 之间的关系来进行刻画?

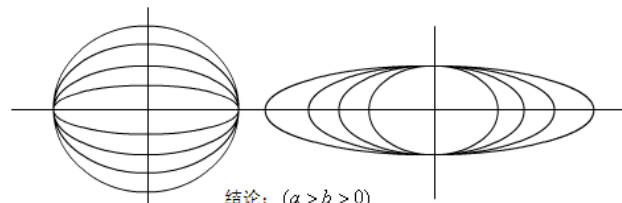
我们把椭圆的 焦距 与 长轴长 的比 $\frac{c}{a}$ 称为椭圆的 _____, 用 _____ 表示, 即 $e = \frac{c}{a}$.

☆思考1: 离心率 e 的取值范围是多少?

答: _____

☆思考2: 椭圆的离心率 e 与 a, b 之间有什么关系? 并利用此关系解释椭圆的扁平程度与 e 之间有何关联?

答: _____



结论: ($a > b > 0$)

当 a 不变时, b 越小, 椭圆越扁, 此时 e _____

当 a 不变时, b 越大, 椭圆越圆, 此时 e _____

当 b 不变时, a 越大, 椭圆越扁, 此时 e _____

当 b 不变时, a 越小, 椭圆越圆, 此时 e _____

$e = \frac{c}{a}$ 越大, 椭圆越扁; $e = \frac{c}{a}$ 越小, 椭圆越圆.

〔练习3〕: 椭圆 $4x^2 + 9y^2 = 36$ 的离心率为_____.

〔练习4〕: 已知椭圆的对称轴是坐标轴, 离心率是 $\frac{1}{3}$, 长轴长为 12, 则椭圆的标准方程为_____.

【例一】 求适合下列条件的椭圆的标准方程:

(1) 长轴长是短轴长的 2 倍, 且过点 $(2, -6)$;

(2) 在 x 轴上的一个焦点与短轴两端点的连线互相垂直, 且焦距为 6;

(3) 长轴长为 6, 离心率为 $\frac{2}{3}$.

【例二】 (1) 若椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦距为 2, 则 $m =$ _____.

(2) 若 A 点坐标为 $(1, 1)$, F_1 是椭圆 $5x^2 + 9y^2 = 45$ 的左焦点, 点 P 是椭圆上的动点, 则 $|PA| + |PF_1|$ 的最小值是_____.

3.1.3 椭圆的第二、第三定义

【学习目标】

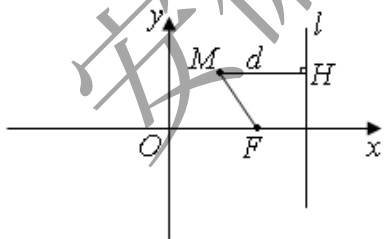
1. 了解椭圆第二定义给出的背景, 理解离心率的几何意义
2. 理解椭圆第二定义、椭圆的准线定义, 掌握椭圆第二定义、椭圆的准线方程以及准线方程的应用
3. 知道椭圆的焦半径公式及其推导方法

【重点】椭圆第二定义、焦半径公式、准线方程

【难点】椭圆的第二定义的运用

【复习引入】

1. 椭圆 $9x^2 + y^2 = 9$ 的长轴长为_____, 短轴长为_____, 半焦距为_____, 离心率为_____, 焦点坐标为_____.
2. 短轴长为8, 离心率为 $\frac{3}{5}$ 的椭圆两焦点分别为 F_1 、 F_2 , 过点 F_1 作直线 l 交椭圆于 A、B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为_____.

【探究】点 $M(x, y)$ 与定点 $F(4, 0)$ 的距离和它到直线 $l: x = \frac{25}{4}$ 的距离的比是常数 $\frac{4}{5}$, 求点 M 的轨迹.

★问题 1: 把上面求出的椭圆在坐标系中画出来, 点 F 和这个椭圆是什么关系?

比值常数 $\frac{4}{5}$ 和这个椭圆是什么关系?

定直线 l 和这个椭圆又有什么关系?

★问题 2: 对于标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的椭圆上任意一点 M , 到焦点 $F_2(c, 0)$ 的距离和它到直

线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比还会是一个常数吗? 如果是,

这个常数是多少?

★问题 3: 在问题 2 中, 椭圆上任意一点 M , 到焦点

$F_2(-c, 0)$ 的距离和它到直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比还

会是一个常数吗? 如果不是, 问有没有这样一条直线 l

使得“椭圆上任意一点 M 到焦点 $F_2(-c, 0)$ 的距离和

它到直线 l 的距离之比是一个常数 $\frac{c}{a}$ ”?

★问题 4: 根据问题 1、2、3, 我们能否说: “到一个定点的距离和它到一条定直线的距离的比是常数的点的轨迹是一个椭圆”?

【引导思考 1】: 若点 $M(x, y)$ 与定点 $F(2, 0)$ 的距离和它到直线 $l: x = 8$ 的距离的比是常数 2, 求点 M 的轨迹并判断此轨迹是否为椭圆. (如果比值为常数 $\frac{1}{2}$ 呢?)

椭圆的第二定义:

当点 M 与一个定点的距离和它到一条定直线的距离的比是常数 $e = \frac{c}{a} (0 < e < 1)$ 时, 这个点的轨迹是椭圆. 定点是椭圆的焦点, 定直线叫做椭圆的准线, 常数 e 是椭圆的离心率.

对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 相应于焦点 $F(c, 0)$ 的准线方

程是 $x = \frac{a^2}{c}$. 根据对称性, 相应于焦点 $F'(-c, 0)$ 的

准线方程是 $x = -\frac{a^2}{c}$. 对于椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$ 的准线

方程是 $y = \pm \frac{a^2}{c}$.

可见椭圆的离心率就是椭圆上一点到焦点的距离与到相应准线距离的比, 这就是离心率的几何意义.

$$(e = \frac{|MF|}{d})$$

【练习1】: 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的准线方程为_____.

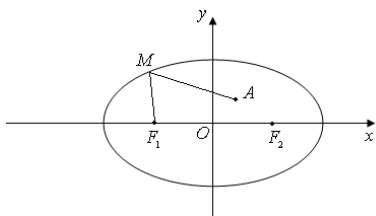
(2) 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 上的点 M 到左准线的距离是

2.5, 则 M 到左焦点的距离为_____, 到右焦点的距离为_____.

★(3) 已知点 M 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的上任意一点,

F_1, F_2 分别为左右焦点; 且 $A(1,1)$, 则

$|MA| + \frac{5}{3}|MF_1|$ 的最小值为_____.



【变式1】: 求 $3|MA| + 5|MF_1|$ 的最小值;

【变式2】: 求 $\frac{3}{5}|MA| + |MF_1|$ 的最小值.

【例一】设 $P(x_0, y_0)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

的一点, 离心率为 e , P 到左焦点 F_1 和右焦点 F_2 的距离分别为 $|MF_{左}|, |MF_{右}|$.

求证: $|MF_{左}| = a + ex_0, |MF_{右}| = a - ex_0$.

☆注: 上结论为焦半径公式.

【例二】设 A, B 两点的坐标分别为 $(-5, 0), (5, 0)$, 直线 AM, BM 相交于点 M , 且它们的斜率之积是 $-\frac{4}{9}$, 求点 M 的轨迹方程.

椭圆的“第三定义”:

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 长轴端点为 A, B , 点 P 为椭圆上异于 A, B 的任意一点, 则直线 AP, BP 的斜率乘积为定值 $-\frac{b^2}{a^2}$.

【推广】若上面 AB 为过椭圆中心的一条弦 AB , 则有:

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2} \quad (\text{思考: 如何证明?})$$

【例三】(1) 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点为 A , 点 P, Q 均在 C 上, 且关于原点对称. 若直线 AP, AQ 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 则 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

(2) P 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上任意一点, F_1, F_2 为左右焦点, A_1, A_2 为椭圆在 x 轴上的左右顶点, 则以 A_1A_2 为直径的圆和以 PF_1 为直径的圆的位置关系是_____.

(3) 设 AB 是过椭圆右焦点的弦, 那么以 AB 为直径的圆必与椭圆的右准线 ()

- A. 相切 B. 相离
C. 相交 D. 相交或相切

【例四】已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点, P 为椭圆上一点, 且 $|PF_1| = |F_1F_2|$, 则 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的半径 $r = ()$

- A. 1 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$ D. 2

【例五】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1 (a > 2)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 为椭圆 C 的上顶点, 直线 AF_2 与椭圆 C 的另一个交点为 B , 若 $|BF_1| = 4|BF_2|$, 则 $a =$ _____.

3.1.4 直线与椭圆的位置关系

【学习目标】

1. 会利用 Δ 判定直线与椭圆的位置关系, 并能利用 $\Delta=0$ 解决直线与椭圆相切时的相关问题
2. 会利用韦达定理计算直线与椭圆的相交弦长, 同时会用焦半径公式解决过椭圆焦点的弦长问题
3. 理解和掌握“点差法”的原理, 会用“点差法”求解中点弦问题

【重点】直线与椭圆的相交弦长问题与“点差法”

【难点】用“点差法”求解中点弦相关问题

【复习引入】

在前面圆一章节的学习中, 我们知道, 要研究直线与圆的相关关系, 一般通过对直线方程与圆方程所

组成的方程组 $\begin{cases} Ax+By+C=0 (B \neq 0) \\ x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \end{cases}$ 的解的个

数来判断直线与圆的交点的个数, 我们有:

1. 若 Δ _____, 则直线与圆相交;

若 Δ _____, 则直线与圆相切;

若 Δ _____, 则直线与圆相离.

2. 若直线与圆有两个交点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 则

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 +}$$

$$\text{或} = \text{_____} \cdot |x_1 - x_2| = \text{_____} \cdot |y_1 - y_2|.$$

(而 $|x_1 - x_2| = \sqrt{\text{_____}}$, 用韦达定理进行求解).

★问题 1: 上面的相关研究方法是否同样适用于直线与椭圆的位置关系?

点 $P(x_0, y_0)$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的位置关

系: 点 P 在椭圆上 $\Leftrightarrow$ _____;

点 P 在椭圆内部 $\Leftrightarrow$ _____;

点 P 在椭圆外部 $\Leftrightarrow$ _____.

直线 $y = kx + m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的位

置关系判断方法: 联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$, 消去 y 后仍得

到一个关于 x 的一元二次方程, 所以:

位置关系	解的个数	Δ 的取值
相交	_____ 解	Δ _____ 0
相切	_____ 解	Δ _____ 0
相离	_____ 解	Δ _____ 0

☆注: 以前的研究方法也同样适用于椭圆

★问题 2: 什么叫“点差法”?

中点弦问题常用“点差法”求解, 即 $P(x_0, y_0)$ 是弦 AB 的中点, $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 将 A 、 B 坐标代入椭圆方程得:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (1) \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

将 (1) 式减 (2) 式得:

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$$

$$\text{变形为: } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{-b^2}$$

$$\text{即: } \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \cdot \frac{(y_1 + y_2)}{(x_1 + x_2)} = \frac{-b^2}{a^2}$$

$$\text{结合 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0 \\ y_1 + y_2 = 2y_0 \end{cases} \text{ 及 } \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = k,$$

$$\text{则有 } k \cdot \frac{y_0}{x_0} = \frac{-b^2}{a^2}. \quad (\text{结合第三定义, 解释两者内在关联})$$

【练习 1】: 已知点 $P(4, 2)$ 是直线 l 被椭圆

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ 所截得的线段的中点, 求直线 l 的方程.

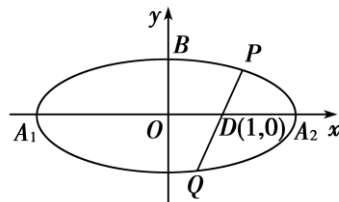
【例一】 中心在原点，一个焦点为 $F(0, \sqrt{50})$ 的椭圆被直线 $y = 3x - 2$ 截得的弦的中点的横坐标为 $\frac{1}{2}$ ，求此椭圆的方程.

【例二】 已知椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，直线 $l: 4x - 5y - 4 = 0$. 椭圆上是否存在一点，它到直线 l 的距离最小？最小距离是多少？

【例三】 已知椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = x + m$.
(1) 当直线和椭圆有公共点时，求实数 m 的取值范围；
(2) 求直线被椭圆截得的弦最长时直线的方程.

【例四】 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， A_1, A_2 分别为椭圆 E 的左右顶点， B 为上顶点， $\triangle A_1BA_2$ 的面积为 2. 直线 l 过点 $D(1, 0)$ 且与椭圆 E 交于 P, Q 两点.

- (1) 求椭圆 E 的标准方程；
- (2) 求 $\triangle OPQ$ 面积的最大值.



【例五】 已知椭圆 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{m-1} = 1 (m > 1)$ ，直线 $y = x - 1$ 交椭圆于 A, B ，若以 AB 为直径的圆经过左焦点 F ，求 m 的值.

3.2.1 双曲线及其标准方程

【学习目标】

1. 与椭圆定义类比, 深刻理解双曲线的定义并能独立推导出双曲线标准方程
2. 理解双曲线定义中“常数要大于0且小于 $|F_1F_2|$ ”这一限制条件的几何意义, 会用待定系数法求双曲线的标准方程

【重点】双曲线的定义、标准方程的推导与求解

【难点】双曲线定义中关于绝对值, $2a < 2c$ 的理解

【复习引入】

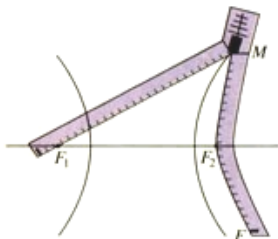
前面我们学习了椭圆的定义: 平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之_____等于常数 (大于 $|F_1F_2|$) 的点的轨迹叫作椭圆。如果把椭圆定义中的“平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的和”改写为“平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离的差”, 那么点的轨迹会怎样? 它的方程又是怎样的呢? 即

	椭圆	一种新的轨迹 (?)
定义	$ MF_1 + MF_2 = 2a$	到两个定点的距离差为定值的动点轨迹?
图形		?
方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	?
性质	$\begin{cases} \text{从图形来看} \dots \\ \text{从方程来推} \end{cases}$	?

★问题 1: 利用什么方法可以得到“到两个定点的距离之差为定值”的动点轨迹的图形?

【引导思考 1】: 和为定值是如何构造的?

【引导思考 2】: 差为定值又该如何构造? 你能想出作图的方法吗?



【引导思考 3】: 你所画出来的图形还是椭圆吗? 这是一种什么曲线? 它上面的点都有什么特点?

答: _____

★问题 2: 点 M 与点 F_1, F_2 距离之差是否就应是 $||MF_1| - |MF_2||$? 它与 $|F_1F_2|$ 之间的大小关系怎样?

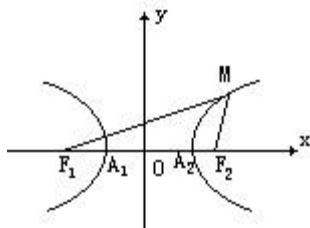
双曲线定义: 平面内到两定点 F_1, F_2 的距离的差的_____为常数 ($0 < \text{常数} < |F_1F_2|$) 的动点的轨迹叫双曲线. 即 $||MF_1| - |MF_2|| = 2a$, ($0 < 2a < 2c$) F_1, F_2 叫双曲线的焦点, $|F_1F_2| = 2c$ ($2c > 0$) 叫做焦距。

☆注: 我们学过的反比例函数图象是双曲线。

直观感受: 双曲线有“两条”(两支), 每一支“有点象”抛物线。

【引导思考 4】: 常数是零时动点的轨迹是什么?

答: _____



【引导思考 5】: 当常数 $= |F_1F_2|$ 时, 动点的轨迹是什么? 还是双曲线吗?

答: _____

【引导思考 6】: 当常数 $> |F_1F_2|$ 时, 动点 M 的轨迹又是什么?

答: _____

双曲线的定义:

数学简记: $||MF_1| - |MF_2|| = \pm 2a$ ($0 < 2a < 2c = |F_1F_2|$)

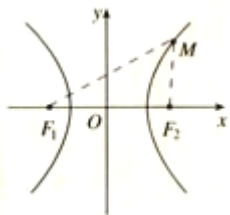
【练习 1】: 判断下列方程是否表示双曲线.

① 方程 $\sqrt{(x+3)^2 + y^2} - \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 4$

② 方程 $\sqrt{(x+5)^2 + y^2} - \sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 10$

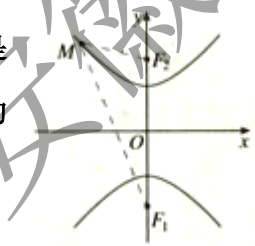
★问题 3: 与求椭圆的标准方程类似, 我们可以根据双曲线的定义推导双曲线的标准方程. 求曲线方程的基本步骤是什么?

【推导】:



当焦点在 x 轴上, 焦点是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 的双曲线标准方程是 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其中 $c^2 = a^2 + b^2$.

★问题 4: 若坐标系的选取不同, 焦点在 y 轴上, 则焦点是 $F_1(0, -c), F_2(0, c)$, 则双曲线的标准方程又为什么?



双曲线的标准方程有焦点在 x 轴上和焦点 y 轴上两种:

焦点在 x 轴上时双曲线的标准方程为:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0);$$

焦点在 y 轴上时双曲线的标准方程为:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

★问题 5: 在双曲线的标准方程中 a, b, c 又有怎样的关系?

答: _____

★问题 6: 如何根据双曲线的标准方程判断焦点的位置?

从椭圆的标准方程不难看出, 椭圆的焦点位置可由方程中含字母 x^2 、 y^2 项的分母的大小来确定, 分母大的项对应的字母所在的轴就是焦点所在的轴. 而双曲线是根据_____判断焦点所在的位置, 即 x^2 项的系数是正的, 那么焦点在_____轴上; y^2 项的系数是_____的, 那么焦点在 y 轴上.

【例 1】(1) 到两定点 $F_1(-3, 0), F_2(3, 0)$ 的距离之差的绝对值等于 6 的点 M 的轨迹是 ()

- A. 椭圆 B. 线段
C. 双曲线 D. 两条射线

(2) 已知 $F_1(3, 3), F_2(-3, 3)$, 动点 P 满足 $|PF_1| - |PF_2| = 4$, 则 P 点的轨迹是 ()

- A. 双曲线 B. 双曲线的一支
C. 不存在 D. 一条射线

(3) 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 上一点 P 到 F_1 的距离为 15, 则点 P 到 F_2 的距离为_____.

【例 2】(1) 已知双曲线的焦点为 $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$, 双曲线上一点 P 到 F_1, F_2 的距离的差的绝对值等于 6, 则双曲线的标准方程为_____.

(2) 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点坐标是 ()

- A. $(0, \pm 2)$ B. $(\pm 2, 0)$
C. $(0, \pm\sqrt{2})$ D. $(\pm\sqrt{2}, 0)$

(3) 已知方程 $\frac{x^2}{2+m} - \frac{y^2}{m+1} = 1$ 表示双曲线, 则 m 的取值范围是_____.

3.2.2 双曲线的简单几何性质

【学习目标】

1. 类比椭圆的几何性质, 得到双曲线的简单的几何性质(范围、对称性、顶点、离心率)
2. 掌握双曲线的渐进线的定义并理解它与双曲线之间的关系

【重点】双曲线的几何性质与渐近线的定义

【难点】渐近线与双曲线之间的关系

★问题 1: 前面我们学习了椭圆的标准方程和椭圆的几何性质, 椭圆有哪些几何性质, 是如何探讨的?

★问题 2: 你能否类比椭圆几何性质的探讨方法, 总结出双曲线中类似的几何性质? 并填写下表:

(☆注: 这里先讨论焦点在 x 轴上这种情形)

	椭圆	双曲线
图形		
方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	
a, b, c 的关系	$a^2 = b^2 + c^2$ ($a > b > 0$)	
范围	$ x \leq a, y \leq b$	
对称性	对称轴: x 轴, y 轴 对称中心: 原点	对称轴: 对称中心:
顶点	$(-a, 0), (a, 0), (0, -b), (0, b)$ 长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$	
焦距	$2c$	
离心率	$e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1)$	

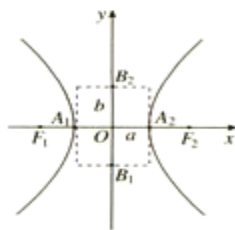
☆思考 1: 你能用代数方法推导出上面的几何性质吗?

令 $y=0$, 则 $x=\pm a$, 所以 $(-a, 0), (a, 0)$ 是双曲线的

顶点, 但令 $x=0$, 得 $y^2 = -b^2$, 方程无实根, 说明双曲线与 y 轴_____交点.

虽然双曲线与 y 轴没有交点, 但是我们把 $(0, -b), (0, b)$

也画在 y 轴上(如图), 并把线段 A_1A_2 叫做双曲线的_____ , 它的长等于_____ ; 线段 B_1B_2 叫做双曲线的_____ , 它的长等于_____ .

☆注: a 叫做双曲线的_____ , b 叫做双曲线的_____ .

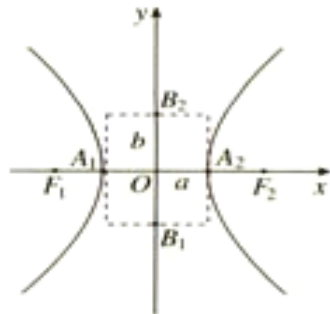
☆思考 2: 双曲线的离心率的范围是什么?

答: _____

【练习 1】: 求双曲线 $9y^2 - 16x^2 = 144$ 的实轴长和虚轴长、焦点坐标、离心率.

★问题 3: 在学习椭圆时, 以原点为中心, $2a, 2b$ 为邻边的矩形, 对估计椭圆的形状, 画简图有很大的作用, 那么在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中作同样的矩形, 问如何利用这个矩形估计双曲线的形状?

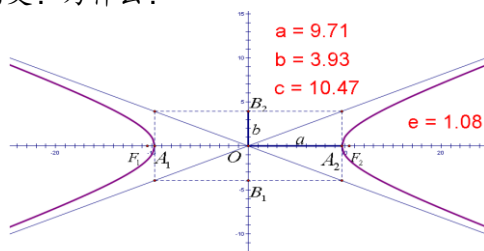
【引导思考 1】: 由图知, 双曲线在矩形的外部, 不可能向椭圆一样去直接画双曲线, 那这个矩形与双曲线的形状有什么关系?



【引导思考 2】: 双曲线的形状是由什么所决定的? 这个决定因素与所画矩形的什么量有关?

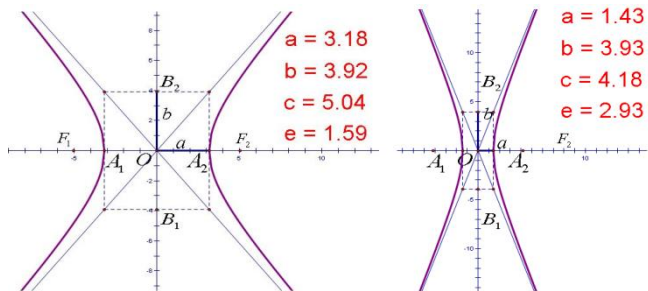
【引导思考 3】: 在图中画出矩形的对角线, 你发现所画矩形的对角线与双曲线之间有什么关系?

【引导思考 4】: 矩形的对角线的方程是什么? 它和双曲线会不会相交? 为什么?



直线 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线，双曲线有 2 条渐近线，且双曲线与它的渐近线无限靠近，但不会相交。
 (实轴和虚轴等长的双曲线叫做等轴双曲线，它的渐近线方程为 $y = \pm x$)
 画双曲线时先画出它的渐近线，这样可以比较精确地画出双曲线。

★问题 4: 椭圆的离心率可以刻画椭圆的扁平程度，那么双曲线的形状与它的离心率之间有什么关系？观察下图你能看出离心率是刻画双曲线的什么几何特征的？



【引导思考】: 离心率与渐近线方程之间有什么关系？

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} =$$

离心率 e 越大，则 $\frac{b}{a}$ 越大，双曲线的开口也就越大。

★问题 4: 刚才分析的都是焦点在 x 轴上的双曲线的几何性质，同样你能自己归纳出焦点在 y 轴上的双曲线的几何性质吗？请填写下表。

标准方程		$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)
图形			
性 质	焦点	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	
	焦距		
	范围		
	对称性		
	顶点	$(-a, 0), (0, a)$	
	轴		

离心率		
渐近线	$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$ (或 $y = \pm \frac{b}{a}x$)	

【例一】 求符合下列条件的双曲线的标准方程：

- (1) 顶点在 y 轴上，两顶点间的距离是 8， $e = \frac{5}{4}$ ；
- (2) 求以椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$ 的焦点为顶点，以椭圆的顶点为焦点的双曲线的方程。
- (3) 对称轴都在坐标轴上的等轴双曲线的一个焦点是 $F_1(-6, 0)$ ，求它的标准方程和渐近线方程。

【例二】(1) 双曲线虚轴的一个端点为 M ，两个焦点为 F_1, F_2 ， $\angle F_1MF_2 = 120^\circ$ ，则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

- (2) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，过左焦点 F_1 作垂直于 x 轴的直线交双曲线的两条渐近线于 M, N 两点，若 $\angle MF_2N$ 是钝角，则双曲线离心率的取值范围是 _____。

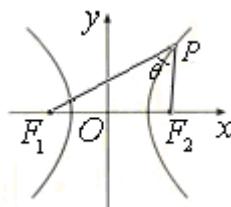
重要结论 1: 如图，已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点， P 为双曲线上一点 (异于顶点)，

$\angle F_1PF_2 = \theta$ ，则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积

为：

$$S_{\triangle F_1PF_2} = b^2 \cdot \cot \frac{\theta}{2}$$

证明：



【例三】 设双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ， F_1, F_2 是其两个焦点，点 P 在双曲线右支上。

- (1) 若 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，求 $\triangle F_1PF_2$ 的面积；
- (2) 若 $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ 时，求点 P 的纵坐标。

3.2.3 双曲线的第二、第三定义

【学习目标】

1. 在与椭圆的第二定义的类比中获得双曲线的第二定义, 进一步学习双曲线的几何性质
2. 理解并掌握双曲线的第二定义, 能运用双曲线的第二定义优化解题方法, 并从中去领略数学中的美

【重点】 双曲线的第二定义的概念及推导

【难点】 正确运用双曲线的第二定义于解题中

【复习引入】

1. 双曲线的第一定义: 平面上到两定点 F_1, F_2 距离之差的绝对值等于常数 $2a$ () 的点的轨迹叫做双曲线. 定点 F_1, F_2 叫做双曲线的焦点, 两焦点的距离叫做双曲线的焦距.
2. 双曲线的标准方程:

焦点在 x 轴: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

焦点在 y 轴: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

其中 $a^2 + b^2 = c^2$

3. 对于焦点在 x 轴上的双曲线的有关性质:

(1) 焦点: $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$; (2) 渐近线: $y = \pm \frac{b}{a}x$;

(3) 离心率: $e = \frac{c}{a} > 1$.

★问题 1: 通过我们前面在学习, 我们知道椭圆可以有多种定义, 问双曲线是否也可以从不同的角度进行定义?

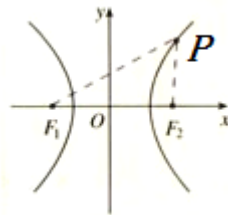
	轨迹	
第三定义	到两定点的直线的斜率乘积为一定值的动点的轨迹	?
.....		

【探究 1】 第二定义公式推导

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

(以正号为例)

$$\Rightarrow cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

 $\Rightarrow$ 

【探究 2】 双曲线的中点弦问题 (点差法)

若 $P(x_0, y_0)$ 是弦 AB 的中点, $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 将 A、B 坐标代入双曲线方程得:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (1) \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

将 (1) 式减 (2) 式整理得: $\frac{(y_2 - y_1) \cdot (y_1 + y_2)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_1 + x_2)} = \frac{b^2}{a^2}$

结合 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0 \\ y_1 + y_2 = 2y_0 \end{cases}$ 及 $\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = k_{AB}$,

则有



——中点弦结论

双曲线第二定义:

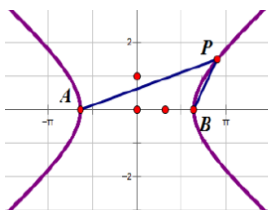
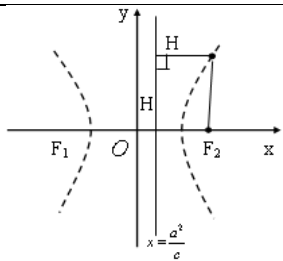
当动点 $P(x, y)$ 到一定点 $F(c, 0)$ 的距离和它到一定直线

$l: x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数 $e = \frac{c}{a} > 1$ 时, 这个动点

$P(x, y)$ 的轨迹是_____。其中定点 $F(c, 0)$ 是双曲

	椭圆	双曲线
第一定义	到两个定点的和为常数 (大于焦距) 的动点的轨迹	到两个定点的差的绝对值为常数 (小于焦距) 的动点的轨迹
第二定义	到一定点与一定直线的距离之比为常数 e ($0 < e < 1$) 的动点	?

线的一个_____, 定直线 $l: x = \frac{a^2}{c}$ 叫双曲线的一条_____, 常数 e 是双曲线的离心率.



双曲线第三定义:

若 A, B 是双曲线上关于原点中心对称的两点, 双曲线上任意动点 $P(x, y)$ 到 A, B 连线的斜率乘积为一定值 $\frac{b^2}{a^2}$, 反之, 若一动点 $P(x, y)$ 到两个定点之间的斜率乘积为一正值常数, 则这个动点 $P(x, y)$ 的轨迹是_____。

即:

$$k_{AP} \cdot k_{BP} = \frac{b^2}{a^2}$$

★问题 2: 与椭圆的第二、第三定义比较, 它们有什么共同点与不同点?

答: _____

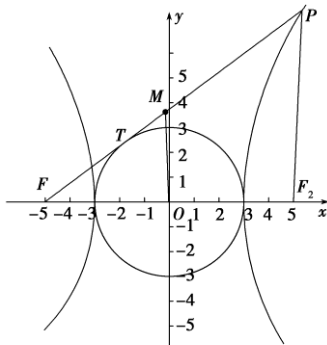
★问题 3: 双曲线有几条准线? 它们分别与哪个焦点相对应?

【例一】(1) 双曲线的 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 渐近线与一条准线围成的三角形的面积是_____。

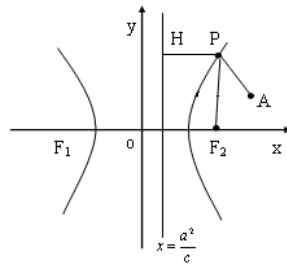
(2) 过点 $P(8, 1)$ 的直线与双曲线 $x^2 - 4y^2 = 4$ 相交于 A, B 两点, 且 P 是线段 AB 的中点, 则直线 AB 的方程为_____。

【例二】(1) 如果双曲线 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 上一点 P 到双曲线右准线的距离 d 等于 8, 求点 P 到左焦点 F_1 的距离 $|PF_1| =$ _____。

(2) 从双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的左焦点 F 引圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的切线, 切点为 T , 延长 FT 交双曲线右支于 P 点, 若 M 为线段 FP 的中点, O 为坐标原点, 则 $|MO| - |MT| =$ _____。



例二 (2) 题图



例三题图

【例三】已知点 $A(3, 1), F(2, 0)$ 在双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 上求一点 P , 使得 $|PA| + \frac{1}{2}|PF|$ 的值最小, 并求出最小值。

【例四】(1) 如图, F_1 和 F_2

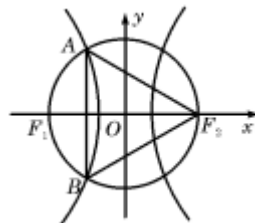
分别是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

的两个焦点, A 和 B 是以 O 为圆心, 以 $|OF_1|$ 为半径的圆与

该双曲线左支的两个交点, 且 $\triangle F_2AB$ 是等边三角形, 则双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $1 + \sqrt{3}$



(2) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 F , O 为坐标原点, 以 OF 为直径的圆与双曲线的一条渐近线相交于 M, N 两点. 若 $\triangle AOF$ 的面积为 $\frac{1}{2}$, 则双曲线的离心率等于 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\sqrt{6}$

3.2.4 直线与双曲线的位置关系

【学习目标】

1. 学会由直线方程与双曲线方程式组成的方程组, 用判别式法判定根的个数即直线与双曲线公共点的个数, 从而知道它们的位置关系

2. 利用数形结合的方法掌握由于直线斜率的变化引起直线与双曲线位置关系的变化

【重点】 利用数形结合的方法得到过定点直线与双曲线的公共点的个数问题

【难点】 结合直线与渐近线之间的关系考虑交点个数

【类比引入】

1. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线方程为: _____

双曲线有 _____ 条渐近线, 且双曲线与它的渐近线无限靠近, 但 _____.

2. 前面我们已经学习了直线与圆、直线与椭圆的位置关系, 有相离、相切、相交、公共点的个数分别为无公共点、一个公共点、两个公共点. 我们可以把直线与椭圆的位置关系的研究思路推广到直线与双曲线位置关系的研究中来, 可得到:

(1) 直线与双曲线的位置关系

设直线为 $l: Ax+By+C=0$, 双曲线方程为 $C: b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, 联立 l 与 C 消去某一变量(x 或 y) 得到关于另一个变量的一元二次方程, 此一元二次方程的判别式为 Δ , 那么:

l 与 C 相离的充要条件是 _____;

l 与 C 相切的充要条件是 _____;

l 与 C 相交于不同两点的充要条件是 _____.

(2) 弦长计算

计算双曲线被直线截得的弦长, 往往是设而不求, 即设弦两个端点坐标为 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 从而

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \underline{\hspace{2cm}}$$

(注意 k 为直线 P_1P_2 的斜率, 若 k 不存在, 则单独计算).

(3) 通径: 过焦点且垂直于实轴的弦长 $\frac{2b^2}{a}$.

【探究】 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 直线 L 过定点 $P(0, 2)$, 试讨论直线 L 与曲线 C 的公共点个数。

(☆提示: 要注意特殊情况的讨论。)

【点评】: 解题需注意对二次项系数是否为零及直线斜率存在与否要进行讨论。

★问题 1: 由上例, 我们知道与双曲线 C 只有一个公共点的直线, 共四条。通过画图说明这四条有何特征?

☆思考 1: 直线与双曲线只有一个公共点是直线与双曲线相切的什么条件? 与 $\Delta = 0$ 之间呢?

答: _____

★问题 2: 若点 P 坐标为 (m, n) , 双曲线方程为

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则直线与双曲线只有一个公共点的直线有多少条? 与该点位置是否有关系?

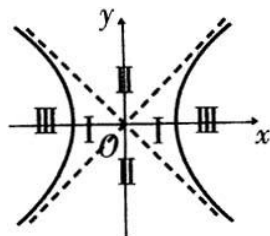
【引导思考 1】: 如果点 P 是双曲线的左焦点, 则过 P 且与双曲线只有一个公共点的直线有几条?

答: _____ 条

【引导思考 2】: 如果点 P 是双曲线的实轴左端点, 则过 P 且与双曲线只有一个公共点的直线有几条?

答: _____ 条

【引导思考 3】: 如果点 P 是



坐标原点, 则过 P 且与双曲线只有一个公共点的直线有几条?

答: _____ 条

【引导思考 4】: 你认为 P 点的位置与满足条件直线的条数有关吗? 应分几种情况来考虑?

总结:

点 $P(m, n)$ 的位置	双 曲 线 上	双 曲 线 内 (含 焦点) III	双曲线外(不含焦点)		
			除渐近 线及原 点 I、II	在渐近 线上(除 原点)	在原 点
直线 条数					

【点评】: 如果我们采用代数的方法来解决就会显得非常麻烦。可见数形结合, 以形助数的思想方法在解析几何解题中显得非常重要。而且我们发现过定点与双曲线只有一个公共点的直线条数情况不同, 跟点的位置有关!

☆思考 2: 对于上述问题, 椭圆又有怎样的结论?

★问题 3: 刚才是对直线与双曲线只有一个公共点情况的研究, 那么当直线与双曲线有两个交点时, 直线又有哪些情况呢? 又有哪些问题可以研究的呢?

【引导探究 1】: 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 直线 L 过点 $P(0, 2)$; 若直线 L 与双曲线 C 的左支有两个公共点, 求直线斜率的取值范围?

【引导探究 2】: 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 直线 L 过点 $P(0, 2)$; 若直线 L 与双曲线 C 的右支有两个公共点, 求直线斜率的取值范围?

【引导探究 3】: 已知双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$, 直线 L 过点 $P(0, 2)$; 若直线 L 与双曲线 C 的两支有两个公共

点, 求直线斜率的取值范围?

【引导探究 4】: 过双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 的右焦点 F 作直线 L 交双曲线于 A、B 两点, 若 $|AB|=8$, 则这样的直线 L 有几条?

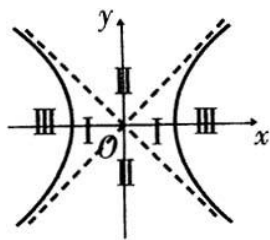
☆思考 3: 若将 $|AB|=8$ 改为 6 或者 9, 以及其他数呢? 答案如何?

【例一】已知双曲线方程为: $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

- (1) 求以 $P(2, 1)$ 为中点的双曲线弦所在的直线方程;
- (2) 过点 $Q(1, 1)$ 能否作直线 l , 使 l 与所给双曲线相交于 A、B 两点, 且 Q 是 AB 的中点? 若存在, 求 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

【点评】: 用点差法求直线方程时, k 求出后, 这条直线不一定满足, 要验证 Δ .

【思考】双曲线的弦中点出现在右图的哪个区域?



【例二】直线 $l: y = kx + 1$ 与双曲线 $C: 2x^2 - y^2 = 1$ 的右支交于不同的两点 A、B,

- (1) 求实数 k 的取值范围;
- (2) 是否存在实数 k , 使得以线段 AB 为直径的圆经过双曲线 C 的右焦点 F? 若存在, 求出 k 的值; 若不存在, 说明理由.

3.3.1 抛物线及其标准方程

【学习目标】

1. 理解并掌握抛物线的定义, 了解抛物线标准方程的推导过程, 理解抛物线 $y^2 = 2px$ 中 p 的几何意义

2. 能根据抛物线的标准方程熟练地写出焦点坐标及准线方程, 同时掌握抛物线方程的四种标准形式, 会用待定系数法求抛物线的方程并画出几何图形

【重点】 抛物线的定义与标准方程的推导

【难点】 抛物线中 p 的几何意义与应用

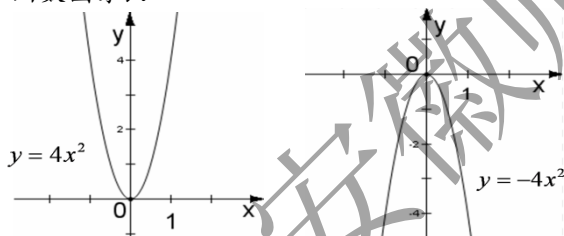
【复习填空】

1. 椭圆的第二定义: _____

2. 双曲线的第二定义: _____

【情境引入】

在初中, 我们学习过了二次函数 $y = ax^2 + bx + c$, 知道二次函数的图象是一条抛物线, 例如: (1) $y = 4x^2$, (2) $y = -4x^2$ 的图象 (展示两个函数图象):



在实际生活中, 我们也有许多的抛物线模型, 例如打篮球时球抛出后的轨迹路线是抛物线、1965年竣工的密西西比河畔的萨尔南拱门, 它就是用不锈钢铸成的抛物线形的建筑物; 再看一张图片 (下右图), 这是世界上现存最早、保存最好的巨大石拱桥——赵州桥, 大家觉得它的拱底是什么曲线? _____

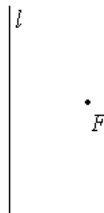


到底什么样的曲线才可以称做是抛物线? 它具有怎样的几何特征? 它的方程是什么呢? 这就是我们今天要研究的内容。

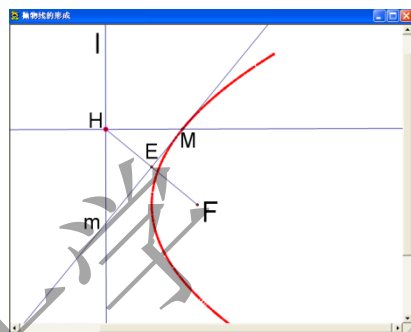
★问题1: 我们知道, 椭圆、双曲线的有共同的几何特征: 都可以看作是, 在平面内与一个定点的距离和一条定直线的距离的比是常数 e 的动点的轨迹。只不过当

$0 < e < 1$ 时轨迹是椭圆, 当 $e > 1$ 时轨迹是双曲线, 问: 当 $e = 1$ 时, 动点的轨迹又是什么曲线?

【引导思考1】: 如图, 给定一条直线与一个定点, 如何用作图的方法作出 $e = 1$ 时的轨迹的草图?



【引导思考2】: 如下图: 点 F 是定点, l 是不经过点 F 的定直线, H 是 l 上任意一点, 过点 H 作 $MH \perp l$, 线段 FH 的垂直平分线 m 交 MH 于点 M 。拖动点 H (在几何画板中), 观察点 M 的轨迹, 你能发现点 M 满足的几何条件吗?



我们把平面内与一个定点 F 和一条定直线 l (l 不经过点 F) 距离_____的点的轨迹叫做抛物线, 点 F 叫做抛物线的焦点, 直线 l 叫做抛物线的准线。

即: 若 $\frac{|MF|}{d} = 1$, 则点 M 的轨迹是抛物线.

☆思考1: 若 F 在 l 上, 此时的点 M 的轨迹是什么图形?

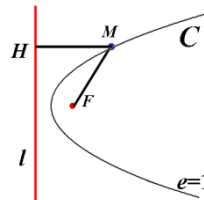
请画出示意图.

答: _____

★问题2: 从抛物线的定义中我们知道, 抛物线上的点 $M(x, y)$ 满足到焦点 F 的距离与到准线 l 的距离相等。那么动点 $M(x, y)$ 的轨迹方程是什么, 即抛物线的方程是什么呢?

【引导思考1】: 设焦点 F 到准线 l 的距离为 p ($p > 0$), 你认为应该如何选择

坐标系求抛物线的方程, 按照你建立直角坐标系的方案, 求抛物线的方程。



〔引导思考2〕: 比较椭圆、双曲线标准方程的建立过程, 你认为应如何选择坐标系, 使所建立的抛物线的方程更简单?

1	2	3
$y^2 = 2px - p^2 (p > 0)$	$y^2 = 2px + p^2 (p > 0)$	$y^2 = 2px (p > 0)$

我们把方程 $y^2 = 2px (p > 0)$ 叫做抛物线的标准方程, 它表示的抛物线的焦点坐标是_____, 准线方程是_____。

★问题 3: 在抛物线标准方程中, 正数 p 的几何意义是什么?

答: p 的几何意义是_____。

★问题 4: 在建立椭圆、双曲线的标准方程时, 选择不同的坐标系我们得到了不同形式的标准方程. 那么, 抛物线的标准方程有哪些不同的形式?

图形	开口方向	标准方程	焦点坐标	准线方程
	向右	$y^2 = 2px (p > 0)$	$(\frac{p}{2}, 0)$	$x = -\frac{p}{2}$
	向左	$y^2 = -2px (p > 0)$	$(-\frac{p}{2}, 0)$	$x = \frac{p}{2}$
	向上	$x^2 = 2py (p > 0)$	$(0, \frac{p}{2})$	$y = -\frac{p}{2}$
	向下	$x^2 = -2py (p > 0)$	$(0, -\frac{p}{2})$	$y = \frac{p}{2}$

☆注: 对表格的说明: 统观四种情况,

(1) $p (p > 0)$ 表示焦点 F 到准线 l 的距离;

(2) 抛物线标准方程中若一次项是 x , 则对称轴为 x 轴, 焦点在 x 轴上; 若一次项是 y , 则对称轴为 y 轴, 焦点在 y 轴上; (对称轴看一次项)

(3) 若标准方程中一次项前面的系数为正数, 则开口方向为 x 轴或 y 轴的正方向; 若一次项前面的系数为负数, 则开口方向为 x 轴或 y 轴的负方向; (符号决定开口方向)

(4) 焦点坐标中横(纵)坐标的值是一次项系数的 $\frac{1}{4}$, 准线方程中的数值是一次项系数的 $-\frac{1}{4}$ 。

〔练习〕: 求下列抛物线的焦点坐标和准线方程:

	焦点坐标	准线方程
(1) $y^2 = 20x$		
(2) $x^2 = 0.5y$		
(3) $2y^2 + 5x = 0$		
(4) $x^2 + 8y = 0$		

★问题 5: 你能说明二次函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图象为什么是抛物线吗? 指出它的焦点坐标、准线方程。(那 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 呢?)

【例一】(1) 抛物线 $x^2 + 2y = 0$ 的准线方程为()

A. $x = \frac{1}{2}$ B. $x = -\frac{1}{2}$ C. $y = \frac{1}{2}$ D. $y = -\frac{1}{2}$

(2) 抛物线 $y = -x^2$ 的焦点坐标为_____。

【例二】根据下列条件分别求出抛物线的标准方程:

(1) 准线方程为 $y = \frac{2}{3}$;

(2) 焦点在 y 轴上, 焦点到准线的距离为 5;

(3) 经过点 $(-3, -1)$;

(4) 焦点为直线 $3x - 4y - 12 = 0$ 与坐标轴的交点。

【例三】设抛物线 $y^2 = mx$ 的准线与直线 $x = 1$ 的距离为 3, 求抛物线的方程。

3.3.2 抛物线的简单几何性质

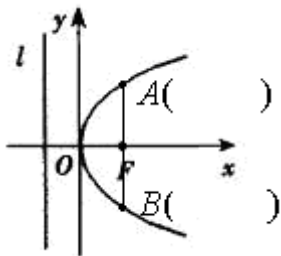
【复习填空】

1. 抛物线的定义: _____

2. 开口向右的抛物线标准方程为: _____,

焦点坐标为: _____;

准线方程为: _____.

3. 对于四种位置不同的抛物线的标准方程, 焦点坐标的位置看_____,
开口方向看_____.★问题 1: $2p$, p , $\frac{p}{2}$ 等的几何意义?

$2p$, p , $\frac{p}{2}$ 等具有鲜明的几何意义: $2p$ 表示通径 (通过焦点且垂直于对称轴的直线与抛物线交于两点, 连接这两点的线段) 长, p 表示焦点到准线的距离, $\frac{p}{2}$ 表示焦点到顶点的距离.

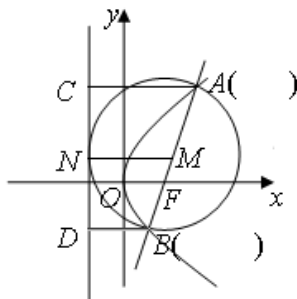
★问题 2: 焦半径公式 $|PF| = ?$

抛物线 $y^2 = \pm 2px (p > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 的焦半径的长是 $|PF| = \underline{\hspace{2cm}}$;

抛物线 $x^2 = \pm 2py (p > 0)$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ 的焦半径的长是 $|PF| = \underline{\hspace{2cm}}$.

★问题 3: 焦点弦图形中的常见结论:

〔探究〕: 如下图, 点 F 是抛物线 $y^2 = 2px$ 的焦点, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是过焦点的弦, 证明下面的结论:

① $y_1 y_2 = -p^2$; $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$;② $|AB| = x_1 + x_2 + p = \frac{2p}{\sin^2 \alpha}$, (其中 α 为倾斜角);③ 以 AB 为直径的圆与 CD 相切 (切于 CD 中点 N);④ 以 CD 为直径的圆与 AB 相切 (切于 F);⑤ $NF \perp AB, CF \perp DF, AN \perp BN$;⑥ AN 平分角 $\angle CAF$, BN 平分角 $\angle DBF$;⑦ AN 和 BN 均与抛物线相切;⑧ A, O, D 三点共线, B, O, C 三点共线;★⑨ 证明: $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{2}{p}$.

〔思考〕焦点弦在什么情况下最短? 焦点弦 AB 的中点 M 的轨迹是什么图形?

【例一】(1) 过抛物线 $y^2 = 12x$ 焦点作直线与抛物线交于 A, B 两点, 且线段 AB 中点 M 的横坐标是 9, 则 $|AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

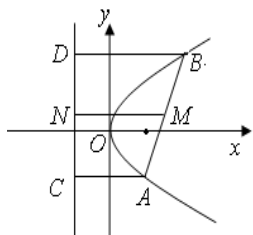
(2) 斜率为 2 的直线经过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 与抛物线相交于两点 A, B , 则线段 AB 的长为_____.

(3) 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点作直线与抛物线交于 A, B 两点, 以线段 AB 为直径的圆与抛物线的准线位置关系是_____.

(4) 已知抛物线 $y^2 = 12x$ 焦点为 F , 点 P 是抛物线上一动点, 定点 $A(4, 1)$, 则 $|PA| + |PF|$ 的最小值是_____.

【例二】(1) 已知 A, B 为抛物线 $y^2 = 12x$ 上的动点, $|AB| = 8$, 求 AB 的中点 P 到 y 轴距离的最小值.

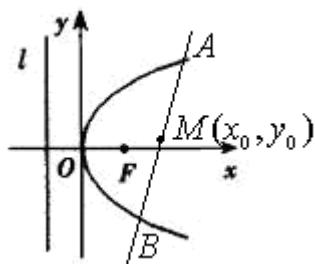
(2) 定长为3的线段 AB 的端点 A, B 在抛物线 $y^2 = x$ 上移动, 求 AB 中点到 y 轴距离的最小值, 并求出此时 AB 中点 M 的坐标.



★问题 4: 抛物线的简单几何性质:

标准方程		
范围		
对称性		
顶点		
离心率		
焦半径公式		

★问题 5: 如下图, 直线 AB 与抛物线相交, 则相交弦 AB 的中点 M 与 k_{AB} 之间有何关系? (提示: 点差法)



结论: (中点弦结论)

【例三】分别求满足下列条件的抛物线的标准方程:

(1) 过点 $(-1, 2)$;

(2) 焦点在直线 $x - 2y - 4 = 0$ 上.

【例四】抛物线 $y^2 = 9x$ 与直线 $2x - 3y - 8 = 0$ 交于 M, N 两点, 则线段 MN 的中点坐标为_____.

【例五】(1) 在平面直角坐标系内, 到点 $(1, 1)$ 和直线 $x + 2y = 3$ 的距离相等的点的轨迹是()

- A. 直线 B. 抛物线
C. 圆 D. 双曲线

(2) 已知动点 M 的坐标为 (x, y) 满足方程 $5\sqrt{x^2 + y^2} = |3x + 4y - 12|$, 则动点 M 的轨迹是()

- A. 椭圆 B. 双曲线
C. 抛物线 D. 以上都不对

【例六】若点 M 到点 $F(4, 0)$ 的距离比它到直线 $l: x + 5 = 0$ 的距离少 1, 求点 M 的轨迹方程.

3.3.3 直线与抛物线的位置关系

★问题 1: 直线与抛物线的位置关系

【例一】已知抛物线的方程为 $y^2 = 4x$, 直线 l 过定点 $P(-2, 1)$, 斜率为 k . k 为何值时, 直线 l 与抛物线 $y^2 = 4x$

- (1) 只有一个公共点;
- (2) 有两个公共点;
- (3) 没有公共点.

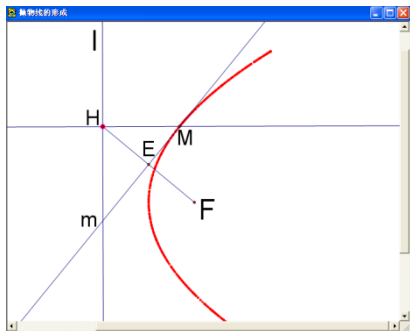
☆思考: 抛物线 $y^2 = 4x$ 有渐近线吗? 为什么?

1、抛物线只在半个坐标平面内无限延伸, 且没有渐近线.

2、直线 $y=kx+b$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的交点个数决定于关于 x 的方程组 $\begin{cases} y=kx+b, \\ y^2=2px \end{cases}$ 解的个数, 即二次方程 $k^2x^2+2(kb-p)x+b^2=0$ 解的个数.

- (1) 当 $k \neq 0$ 时,
若 $\Delta > 0$, 则直线与抛物线有 2 个不同的公共点;
若 $\Delta = 0$, 直线与抛物线有 1 个公共点;
若 $\Delta < 0$, 直线与抛物线 0 公共点.
- (2) 当 $k = 0$ 时, 直线与抛物线的轴 平行或重合 ,
此时直线与抛物线有 1 个公共点.

★问题 2: 如下图, 直线 EM 与抛物线什么样的位置关系? 如何证明?



结论: 抛物线焦点与准线上任一点连线的垂直平分线与抛物线 相切 .

【例二】(1) 已知点 $A(-2, 3)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 的准线上, 过点 A 的直线与 C 在第一象限相切于点 B , 记 C 的焦点为 F , 则直线 BF 的斜率为()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

(2) 若直线 $l: y = (a+1)x - 1$ 与曲线 $C: y^2 = ax$ 恰好有一个公共点, 试求实数 a 的取值集合.

(3) 在抛物线上求一点 P , 使得点 P 到直线 $y = x + 3$ 的距离最短.

(4) 求准线平行于 x 轴, 且截直线 $y = x - 1$ 所得的弦长为 $\sqrt{10}$ 的抛物线的标准方程.

(5) 直角三角形的直角顶点在原点, 另两个点在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上, 且一直角边的方程是 $y = 2x$, 斜边长是 $5\sqrt{3}$, 求此抛物线的方程.

【例三】已知 A, B 为抛物线 E 上不同的两点, 若抛物线 E 的焦点为 $(1,0)$, 线段 AB 恰被 $M(2,1)$ 所平分.

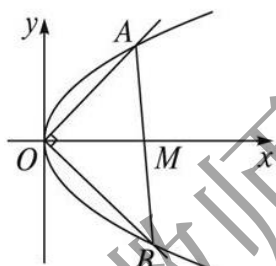
(1) 求抛物线 E 的标准方程;

(2) 求直线 AB 的方程.

【例四】如图, 过抛物线 $y^2 = 2px$ 的顶点 O 作两条互相垂直的弦交抛物线于 A, B 两点.

(1) 证明: 直线 AB 过定点;

(2) 求 $\triangle ABC$ 面积的最小值.



【例五】设 P 是抛物线 $y^2 = 4x$ 上的一个动点, F 为抛物线焦点.

(1) 求点 P 到点 $A(-1,1)$ 的距离与点 P 到直线 $x = -1$ 的距离之和的最小值;

(2) 若 $B(3,2)$, 求 $|PB| + |PF|$ 的最小值.

【例六】(1) (多选题) 已知斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 经过抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F , 与抛物线 C 交于点 A, B 两点(点 A 在第一象限), 与抛物线的准线交于点 D , 若 $|AB| = 8$, 则以下结论正确的是()

A. $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = 1$

B. $|AF| = 6$

C. $|BD| = 2|BF|$

D. F 为 AD 中点

(2) 如果点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$ 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的点, 它们的横坐标依次为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$, F 是抛物线的焦点, 若 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{10} = 5$, 则 $|P_1F| + |P_2F| + \dots + |P_{10}F| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 抛物线 $y^2 = 12x$ 上与焦点的距离等于 9 的点的坐标是 .

(4) (2020 · 辽宁葫芦岛协作校考试) 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点是 F , 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 分别过 A, B 两点作直线: $x = -2$ 的垂线, 垂足分别为 E, H . 若 $|AE| = 2|BH|$, 则直线 l 的斜率 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例七】已知过点 $A(-4, 0)$ 的动直线 l 与抛物线 $G: x^2 = 2py (p > 0)$ 相交于 B, C 两点. 当直线 l 的斜率是 $\frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$.

(1) 求抛物线 G 的方程;

(2) 设线段 BC 的中垂线在 y 轴上的截距为 b , 求 b 的取值范围.

选择性必修2 第四章、数列

4.1.1 数列的概念

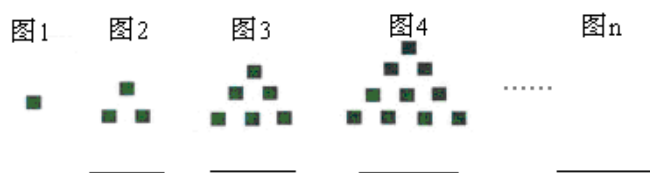
【学习目标】

1. 认识和理解数列的概念，理解数列通项公式的概念及其意义，会根据某些数列前若干项写出其通项公式
2. 区别数列与集合的异同点，理解数列与函数的关系

【重点】数列的概念及其通项公式的求解

【难点】理解数列与函数的关系

【情境引入】看下图，写出每个图案中小石子的个数，并猜测第 n 个图像小石子的个数：



数列的定义：

_____ 称为数列，数列中的每一个数都叫做这个数列的 _____，第 n 项记作 _____。数列一般简记为 _____。

数列的分类：

- (1) 根据数列的项数可以将数列分为两类：
项数有限的数列叫做 _____，项数无限的数列叫做 _____。
- (2) 按数列的每一项随序号变化的情况分类：
_____， _____， _____， _____。

【探究一】认识数列：填写下表

x 的取值	1	2	3	4	5	...	n	数列类型	通项公式
$f(x) = 2x + 1$						...			
$f(x) = \frac{1}{x}$						...			
$f(x) = x^2$						...			

$f(x) = x^0$						...			
$f(x) = \cos(\pi x)$						...			

★问题 1：符号 $\{a_n\}$ 与 a_n 有什么区别与联系？

★问题 2：数列中的项必须要有规律吗？

★问题 3：数列用 $\{a_n\}$ 表示，其项的性质满足集合元素的三要素吗？

与集合元素相比，数列的项满足 _____、 _____ 三个性质。
另外，数列中的每一项都应是 _____。

★问题 4：数列可看作是序号与项之间的一个对应关系（映射），那么它与函数有什么相似之处？

数列与函数的关系：

从函数观点看，数列可以看成以 _____ 为定义域的函数 $a_n = f(n)$ ，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一系列函数值。

反过来，对于函数 $y = f(x)$ ，如果 $f(i), (i = 1, 2, 3, \dots)$ 有意义，那么我们可以得到一个数列 _____。

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与项数 n 之间的函数关系，可以用一个公式 $a_n = f(n)$ 来表示，那么就把这个公式叫这个数列的 _____。

★问题 5：数列的通项公式与函数的解析式有什么联系？数列一定有通项公式吗？

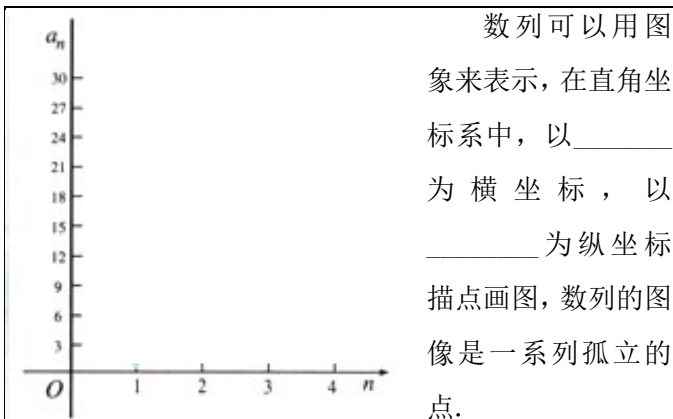
★问题 6：数列可以用图像表示吗？

【例一】(课本 P6 例 4) 图中的一系列三角形图案称为谢尔宾斯基三角形，在图中的 4 个大三角形中，着

色的三角形的个数依次构成一个数列的前4项, 写出这个数列的一个通项公式. 并画出它的图像, 并说出数列的图像表示的特点.



解: 如图, $a_n =$ _____



数列可以用图
象来表示, 在直角坐
标系中, 以 _____
为横坐标, 以 _____
为纵坐标
描点画图, 数列的图
像是一系列孤立的
点.

数列的简单表示法有: _____、列表法、
_____、简单的递推公式.

★注: 换个角度观察上图中的4个图形, 可以发现,
 $a_1 = 1, a_2 = \underline{\quad} a_1, a_3 = \underline{\quad} a_2, a_4 = \underline{\quad} a_3, \dots$
由此可以猜想: 当 $n \geq 2$ 时, 满足 _____,
像这种用一个数列相邻两项或多项之间的关系可以用
一个式子来表示, 这个式子就叫做这个数列的
_____.

【例二】根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出数列的
前5项, 并画出它们的图象.

(1) $a_n = \frac{n^3 + n}{2}$; (2) $a_n = \cos \frac{(n-1)\pi}{2}$.

【例三】判断正误:

- (1) 任何数列都有通项公式 ()
- (2) 一个数列可能有几个不同形式的通项公式 ()
- (3) 数列的项都是无限的 ()
- (4) 数列 1, 3, 5, 7 可表示为 $\{1, 3, 5, 7\}$ ()
- (5) 数列 1, 0, -1, -2 与数列 -2, -1, 0, 1 是相同的数列 ()

(6) 数列 $\{\frac{n+1}{n}\}$ 的第 k 项为 $1 + \frac{1}{k}$ ()

(7) 数列 0, 2, 4, 6, 8, ... 可记为 $\{2n\}$ ()

【例四】(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为
 $a_n = n^2 + 2n$, 试判断 120 是不是数列 $\{a_n\}$ 中的一项?
若是, 是第几项?

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3 - 2\cos \frac{n\pi}{2}$.
求 a_1 , 并证明: $a_{m+4} = a_m$.

【例五】(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为
 $a_n = n^2 - 5n + 4$.

- ① 数列中有多少项是负数?
- ② n 为何值时, a_n 有最小值? 并求出最小值.

(2) (易错) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为
 $a_n = n^2 - k \cdot n + 3$ (其中 k 为常数), 若 $\{a_n\}$ 为单增数
列, 则 k 的取值范围为 _____.

【例六】写出下列数列的一个通项公式:

(1) $-3, 0, 3, 6, 9, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

(2) $0, 3, 8, 15, 24, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

(3) $3, 5, 9, 17, 33, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

(4) $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

(5) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

(6) $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

(7) $1, -3, 5, -7, 9, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

(8) $\frac{2}{3}, -1, \frac{10}{7}, -\frac{17}{9}, \frac{26}{11}, -\frac{37}{13}, \dots \Rightarrow a_n =$ _____.

4.1.2 数列的递推表示

【学习目标】

1. 了解数列的递推表示, 理解递推公式的意义
2. 掌握利用数列的递推公式求解通项公式的常用方法, 体会累加法、累乘法中的相消思想
3. 了解斐波那契数列及其规律, 感受数列是刻画自然规律的数学模型, 体验实践中数学的趣味

【重点】理解递推公式的意义, 会用递推关系求通项

【难点】利用累加法和累乘法求数列的通项公式

【情境引入】

1. 如果一对兔子每月能生1对小兔子, 而每对小兔在它出生后的第3个月里, 又能开始生1对小兔子, 假定在不发生死亡的情况下, 由1对初生的兔子开始, 1年后能繁殖成多少对兔子?
2. 小明要上楼梯, 他每次能向上走一级或两级, 如果楼梯有10级, 他有几种不同的走法?

【探究一】分析情境一, 填写下表格:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔子对数												

★问题1: 你能发现在上面求出的兔子对数的数列中各项之间有什么关系吗? _____

★问题2: 你能不能用数学符号语言将这个数列表示出来? _____

一个神奇的数列——斐波那契数列:

满足条件 $a_1 = \underline{\quad}, a_2 = \underline{\quad}, a_n = \underline{\quad}$ ($n \geq 3$) 的数列称为斐波那契数列.

如果已知数列的第1项(或前几项), 且从第2项(或某一项)开始的任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} (或前几项) 间的关系可以用一个公式来表示, 那么这个公式就叫做这个数列的_____.

【探究二】分析情境二, 填写下表格前4项:

楼梯数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
走法										

★问题3: 指出此数列根斐波那契数列有什么相同和不同? _____

★问题4: 利用斐波那契数列的递推关系求出10级台阶共有_____种走法.

【例一】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 1$, ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) $a_1 = -1$, 写出该数列的前五项, 并归纳它的通项公式;

(2) $a_1 = 3$, 写出该数列的前五项, 并归纳它的通项公式;

★点评:

1. 用递推公式给出一个数列, 必须给出①“基础”——数列 $\{a_n\}$ 的第1项或前几项; ②递推关系——数列 $\{a_n\}$ 的任一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1} (或前几项) 之间的关系, 并且这个关系可以用一个公式表示.

2. 并不是所有数列都有递推公式.

3. 有些数列存在递推公式, 但不一定唯一.

【例二】(1) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, a_2 = 5, a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$, 则 $a_6 = \underline{\quad}$.

(2) 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}, a_n = (-1)^n \cdot 2a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 则 a_5 等于 ()

A. $-\frac{16}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $-\frac{8}{3}$ D. $\frac{8}{3}$

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 的第一项是1, 第2项是2, 以后各项由 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ ($n \geq 1$) 给出, 设 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前3项分别为

【例三】(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$a_1 = 1, a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} \quad (n \geq 2), \text{ 求数列 } \{a_n\} \text{ 的}$$

通项公式.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)a_{n-1} (n \geq 2)$, 求

数列的通项公式 a_n .

点评: 【方法小结】

由数列的递推公式求通项公式的常用方法:

(1) 累加法

当 $a_n - a_{n-1} = f(n)$ 满足一定条件时, 常用

$$a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 \text{ 累加.}$$

(2) 累乘法

当 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = g(n)$ 满足一定条件时, 常用

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \text{ 累乘.}$$

【例四】(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, n \geq 2$ 时,

$a_n a_{n-1} = a_{n-1} - a_n$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1$, 以后各项由

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + 1 \quad (n \geq 1) \text{ 给出. 求数列}$$

$\{a_n\}$ 的通项公式.

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$

$(n \in \mathbb{N}^*)$, 求通项 a_n .

【例五】设 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的正项数列, 且

$$(n+1)a_{n+1}^2 - na_n^2 + a_{n+1} \cdot a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}^*), \text{ 求 } a_n.$$

解法一:

解法二:

解法三:

4.2.1 等差数列的定义与通项公式

【学习目标】

1. 理解等差数列的概念,能判定一个数列是否为等差数列
2. 经历并掌握等差数列通项公式的推导过程及思想,体会等差数列与一次函数的关系
3. 理解 a_n, a_1, n, d 四个量之间“知三求一”的关系

【重点】等差数列的概念及其通项公式的推导

【难点】等差数列的函数特征的理解

【复习回顾】

1. 数列(与集合相比)的三个特征:_____
2. 从函数观点看,数列可看作是定义域为_____对应的一系列函数值,从而数列的通项公式也就是相应函数的_____.

【情境引入】

- 1). 图中表示堆放的钢管,共堆放了7层,自上而下分别有4, 5, 6, 7, 8, 9, 10根钢管,钢管数排成一个数列: 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10



- 2). 某剧院前排座位号分别是: 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38

★问题1: 请同学们思考,以上两个数列有什么共同的特点?

答: 发现这两个数列有一个共同特点: _____

等差数列的定义:

如果一个数列_____,那么这个数列就叫等差数列.这个常数叫做等差数列的_____,通常用字母_____来表示.

☆注意:

- ① 为什么要“从第二项起”?
- ② 公差 d 一定是由后项减前项所得;
- ③ 每一项与它的前一项的差必须是同一个常数(为什么强调“同一个常数”?);

★问题2: 你能将等差数列的文字语言转化为数学表达式吗?

答: 等差数列的数学表达: _____

★问题3: 引例中两个数列的公差和通项公式分别为多少?

答: _____

数列	公差	通项公式
4, 5, 6, 7, 8, 9, 10		

56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40, 38		
--	--	--

[练习]: 判断下列数列中哪些是等差数列,哪些不是?如果是,写出首项 a_1 和公差 d , 如果不是,说明理由.

- 1) . 0, 0, 0, 0, 0, 0, ;
- 2) . -3, -2, -1, 1, 2, 3,;
- 3) . 1, 0, 1, 0, 1,

[思考1]: 公差 d 的取值范围?

【思考2】: 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_{n+1} - a_n = d$ (d 是常数, $n \in N$ 且 $n \geq 2$), 则数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗?

答: _____

★问题4: 如果等差数列 $\{a_n\}$ 首项是 a_1 , 公差是 d , 那么这个等差数列 a_2, a_3, a_4 如何表示? a_n 呢?

【探究一】 $a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 =$ _____

$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 =$ _____ = _____

$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 =$ _____ = _____ 猜想:

$a_5 - a_4 = d \Rightarrow a_5 =$ _____ = _____

.....

$a_n =$ _____ (思考3: 这是等差数列的通项公式吗?)

等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为: _____.

★问题5: 上面求通项公式的方法叫不完全归纳法, 这种导出公式的方法不够严密, 你能给出一个更为严密的推导方法吗?

【探究二】 $\because a_n - a_{n-1} = d$,

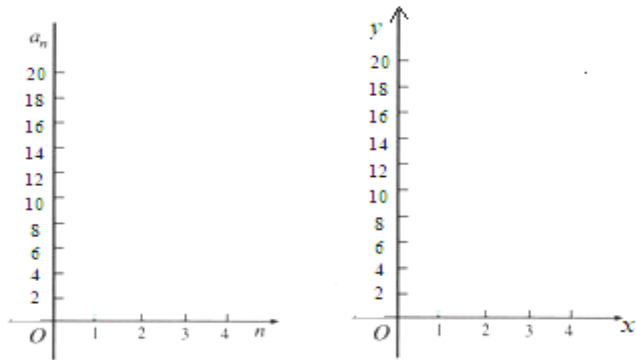
(思考: 还有其他方法吗?)

公式理解:

通项公式含有 a_1, d, n, a_n 这4个量, 已知三个量, 第4个量就是未知数, 通项公式就是方程, 解方程就可以求出第4个量. 即利用方程的思想“知三可求一”.

如: 等差数列 $\{a_n\}$, $a_1 = 1, d = 4$, 则 $a_n =$ _____.

[练习] (1) 在下面作图中做出数列 $\{a_n\}$, $a_n = 4n - 3$ 的图像, 这个图像有什么特点?



(2) 在上面右图中做出函数 $y = 4x - 3$ 的图象，将它与左图对比，说说两者之间的异同点？

	等差数列	一次函数
解析式	$a_n = 4n - 3 (n \in \mathbb{R}^*)$	$y = 4x - 3$
不同点		
相同点		

【探究三】(由等差数列通项公式得

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + (a_1 - d)$ (d, b 是常数)，当 $d \neq 0$ 的时候，通项公式是关于 n 的一次式，一次项的系数是公差。等差数列通项可以写成 $a_n = pn + q$ 形式) 反之如果数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = pn + q$ (其中 p, q 是常数)，那么这个数列是等差数列吗？如果是，请求出它的首项与公差？

【例一】(1) 2 022 是等差数列 4, 6, 8, ... 的()

- A. 第 1 008 项 B. 第 1 009 项
C. 第 1 010 项 D. 第 1 011 项

(2) 已知 $a = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, 则 a, b 的等差中项为()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) 等差数列 $x, 3x+3, 6x+6, \dots$ 的第四项等于()

- A. 0 B. 9 C. 12 D. 18

【例二】(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_5 = 10$, $a_{12} = 31$ ，则首项 $a_1 =$ _____，与公差 $d =$ _____。

(2) 若 $d = -2$, $a_{20} = -397$ ，则 $a_n =$ _____。

(3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $a_2 + a_5 = 4$, $a_n = 33$ ，则 n 的值为 _____；

【例三】已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_5 = 10$, $a_{15} = 25$ ，求 a_{25} 的值。

[思考 1]: 解方程组比较麻烦，可否避免？

[思考 2]: 发现: $a_{15} - a_5 = 10d = (15-5)d$ (是一种巧合，还是对任意的两项差都满足？)

在等差数列中，若 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbb{R}^*$)，则

$$a_m + a_n = a_p + a_q;$$

若 $m+n=2p$ ($m, n, p \in \mathbb{R}^*$)，则 $a_m + a_n = 2a_p$ 。

【例四】(1) (2022 · 湖北武汉高三月考) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 750$ ，则 $a_2 + a_8 =$ ()

- A. 150 B. 160 C. 200 D. 300

(2) 若 $\{a_n\}$ 为等差数列， $a_{15} = 8$, $a_{60} = 20$ ，则 $a_{75} =$ _____。

等差数列的通项公式的第二形式:

$$a_n = a_m + (\text{_____})d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{a_n - a_m}{n - m}.$$

比较 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 与 $a_n = a_m + (n-m)d$ 发现，前式是后式的特例，后式是前式的推广。

[思考 3]: 发现: 5, 15, 25 成等差， a_5, a_{15}, a_{25} 也成等差；在等差数列 $\{a_n\}$ 中， $k_1, k_2, k_3 \dots$ 成等差数列，那么 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3} \dots$ 成等差数列吗？(课后思考)

4.2.2 等差数列的性质及其应用

【学习目标】

1. 理解等差数列的定义基础上初步掌握等差数列几个特征性质并能运用性质解决一些简单问题
2. 体会公式探求过程中从特殊到一般的思维方法, 渗透方程思想、分类讨论思想及转化思想, 优化思维品质, 感受思维的奇异美、结构的对称美、形式的简洁美、数学的严谨美.

【重点】等差数列通项公式的性质推导及其简单应用

【难点】等差数列的性质的探究

【复习引入】

1. 首项为
- a_1
- , 公差为
- d
- 的等差数列的通项公式为:

$$a_n = \underline{\hspace{2cm}} = a_m + \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 数列
- $a_n = pn + q$
- (
- p, q
- 是常数) 一定是
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- , 公差为
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- , 首项为
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- .

3. 公差
- $d = \underline{\hspace{2cm}}$
- , 其几何意义为
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- ; 当
- $d > 0$
- ,
- $\{a_n\}$
- 是一个
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- 数列, 当
- $d < 0$
- ;
- $\{a_n\}$
- 是一个
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- 数列; 当
- $d = 0$
- ,
- $\{a_n\}$
- 是一个
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- 数列.

【探究一】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $k_1, k_2, k_3, \dots$ 成等差数列, 那么 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \dots$ 成等差数列吗?

性质一:

1. 若
- $\{a_n\}$
- 为等差数列, 则下标成等差数列且公差为
- m
- 的项
- $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in \mathbb{N}^*)$
- 组成公差为
- $\underline{\hspace{2cm}}$
- 的等差数列.

(特别地, 若三个数 a, A, b 组成等差数列, 那么 A 叫做 a 与 b 的 $\underline{\hspace{2cm}}$, 即 $2A = a + b$ 或 $A = \underline{\hspace{2cm}}$)

2. 若
- $m + n = p + q (m, n, p, q \in \mathbb{R}^*)$
- , 则
- $a_m + a_n = a_p + a_q$
- ;

若 $m + n = 2p (m, n, p \in \mathbb{R}^*)$, 则 $a_m + a_n = 2a_p$.

3. 特别地, 若
- n
- 为奇数且
- $n \geq 3$
- , 则有

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_k + a_{n-k+1} = 2a_{\frac{n+1}{2}}.$$

推导:

『练习1』在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_7 = 6$, 则:

$$\textcircled{1} a_6 + a_8 = \underline{\hspace{2cm}}; \quad \textcircled{2} a_2 + a_8 + a_{11} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例一】(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 8, a_2 = 2$. 则

$$a_8 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_2 + a_6 + a_{10} = 1$, 则

$$a_3 + a_9 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(3) 已知等差数列 $\{a_n\}$, 若 $a_2 + a_3 + a_5 + a_8 = 48$,

$$\text{则 } a_{14} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(4) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = -24$,

$$a_{18} + a_{19} + a_{20} = 78, \text{ 则 } a_3 + a_{18} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(5) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 - a_4 - a_8 - a_{12} + a_{15} = 2$,

$$\text{则 } a_3 + a_{13} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(6) 设 $\{a_n\}$ 为等差数列, 若 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

$$= 450, \text{ 则 } a_2 + a_8 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(7) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{101} = 0, \text{ 则有 } (\quad)$$

$$\text{A. } a_1 + a_{101} > 0$$

$$\text{B. } a_2 + a_{101} < 0$$

$$\text{C. } a_3 + a_{99} = 0$$

$$\text{D. } a_{51} = 51$$

(8) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}$

$$= 100, \text{ 求 } a_9 - \frac{1}{3}a_{13} \text{ 的值.}$$

【例二】在数列 $\{a_n\}$ 中, $3a_{n+1} = 3a_n + 2 (n \in \mathbb{N}^*)$,

且 $a_2 + a_4 + a_7 + a_9 = 20$, 求 a_{10} .

【探究二】 若 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是等差数列, 那么数列 $\{2a_n + 3b_n\}$ 是不是一个等差数列, 如何证明?

性质二:

若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, 则下列数列:

- ① $\{c + a_n\}$ (c 为任一常数) 是公差为 d 的等差数列;
- ② $\{c \cdot a_n\}$ (c 为任一常数) 是公差为 cd 的等差数列;
- ③ $\{a_n + a_{n+k}\}$ (k 为常数, $k \in \mathbb{N}^*$) 是公差为 $2d$ 的等差数列;
- ④ 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别是公差为 d_1, d_2 的等差数列, 则数列 $\{pa_n + qb_n\}$ (p, q 是常数) 是公差为 $pd_1 + qd_2$ 的等差数列.

证明:

【练习 1】(多选题) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列, 则下列数列为等差数列的有()

- A. $\{a_n + a_{n+1}\}$ B. $\{a_n^2\}$
- C. $\{a_{n+1} - a_n\}$ D. $\{2a_n\}$

【例三】 (1) (2022 塘沽高二检测) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列. 若 $a_1 + b_1 = 7, a_3 + b_3 = 21$, 则 $a_5 + b_5 =$ ____.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 = 12, a_4 + a_5 + a_6 = 18$, 则 $a_{10} + a_{11} + a_{12} =$ ____.

(3) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 + a_4 + a_7 = 15$,

$a_3 + a_6 + a_9 = 3$, 则 $a_2 + a_5 + a_8$ 的值为 ____.

【例四】

(1) 一等差数列由三个数组成, 三数之和为 9, 三数的平方和为 35, 求此三数.

(2) 成等差数列的四个数之和为 26, 第二数与第三数之积为 40, 求这四个数.

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_4 + a_7 = 15$, $a_2 a_4 a_6 = 45$, 求数列的通项公式.

【点评】: 对称设项法:

三数成等差数列时, 一般设为 $a-d, a, a+d$, 四数成等差数列时, 一般设为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$.

(想一想, 五数或六数成等差数列怎么设, 有什么规律吗?)

【例五】 (1) (全国卷) 设 $\{a_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 15, a_1 a_2 a_3 = 80$, 则 $a_{11} + a_{12} + a_{13}$ 等于()

- A. 120 B. 105 C. 90 D. 75

(2) 已知 5 个数成等差数列, 它们的和是 5, 平方和为 $\frac{85}{9}$, 求这 5 个数.

4.3.1 等差数列的前 n 项和公式推导

【学习目标】

1. 掌握等差数列前 n 项和公式及其推导过程, 渗透倒序相加求和的数学方法
2. 会简单运用等差数列的前 n 项和公式解决相关问题, 并通过公式的运用体会方程的思想
3. 通过运用公式的过程, 提高类比化归、数形结合的能力.

【重点】等差数列前 n 项和公式的推导和应用【难点】等差数列前 n 项和公式的推导过程中渗透倒序相加的思想方法

【情境引入】

1). 德国伟大的数学家高斯“神速求和”的故事, 小高斯上小学四年级时, 一次教师布置了一道数学习题: “把从 1 到 100 的自然数加起来, 和是多少?” 年仅 10 岁的小高斯略一思索就得到答案 5050, 这使教师非常吃惊, 那么高斯是采用了什么方法来巧妙地计算出来的呢?

高斯的解法如下:

$$(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)=101 \times 50=5050$$

2). 图中表示堆放的钢管, 共堆放了 7 层, 自上而下分别有 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 根钢管, 请快速求出钢管的总根数?



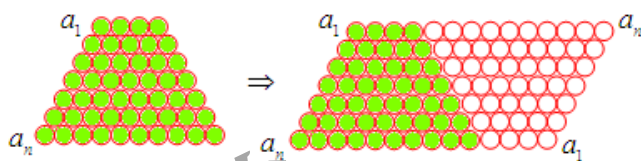
★问题 1: 请同学们思考, 高斯的算法妙处在哪里? 利用高斯算法如何求等差数列的前 n 项和公式?

答: $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n =$

[思考 1]: 是否刚好配对成功呢?

[思考 2]: 那么该如何解决落单的 $a_{\frac{n+1}{2}}$ 呢?

★问题 2: 但是对 n 讨论麻烦了, 能否有更好的方法求前 n 项和公式呢? 回到刚才引入 2 的问题上来, 如何快速的求出一堆钢管的总根数?



$$4+5+6+7+8+9+10$$

由 _____ 可知, 结果为 _____ 根.

一般地, 我们称 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 用 _____ 表示, 即 _____.

★问题 3: 能否利用情境引入中的方法求等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$?

【探究一】根据引入 2 得到的启示, 用倒置的思想求等差数列前 n 项和 S_n .

推导: $\because S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$

[思考 3]: 将你的方法与教材的方法对比, 分析异同点.

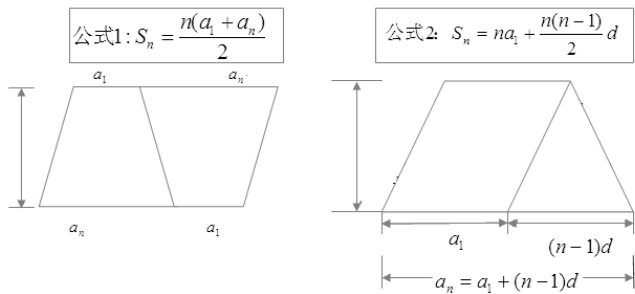
(☆注: 这种方法叫“倒序相加法”)

等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式:

$$S_n = \quad =$$

★问题 4: 能否给求和公式一个几何解释呢?

【探究二】从多角度来看等差数列的求和公式



★问题5: 等差数列前 n 项和 S_n 一定是关于 n 的二次函数吗?

【探究三】 从函数角度来看等差数列求和公式 S_n

推导: $S_n =$

公式1 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$

公式2 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$

通项公式: $a_n = a_1 + (n-1)d$

公式中一共含有五个量, 根据三个公式之间的联系, 由方程的思想, 知三可求二。

【思考4】: 比较公式1与公式2, 它们分别从哪些角度反映了等差数列的性质?

【练习1】(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -3$, $a_2 = 5$, 则 $\{a_n\}$ 的前10项和为_____.

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 3$, $d = 2$, $S_n = 49$, 则 $n =$ _____.

(3) 计算: $1+3+5+\cdots+(2n-1) =$ _____;

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 =$ _____.

【例一】 (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , $S_4 = 40$, $S_n = 210$, $S_{n-4} = 130$, 则 $n =$ ()

A. 12 B. 14 C. 16 D. 18

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_{10} = 100$, $S_{100} = 10$, 试求 S_{110} .

【例二】 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 3n + 2$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并判断它是否为等差数列.

(1) 当 $d \neq 0$ 时, 数列 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ 的图像是抛物线 $y = Ax^2 + Bx$ 上的一群孤立的点;

(2) 当 $d = 0$ 时, _____

★问题6: 反过来, 若 $S_n = An^2 + Bn + C$ (A, B, C 为常数), 则数列 $\{a_n\}$ 一定是等差数列吗?

【练习2】 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{2}{3}n + 3$, 则这个数列的通项公式 $a_n =$ _____.

【点评】

若数列的前 n 项和 $S_n = An^2 + Bn + C$ (A, B, C 为常数)

当 $C = 0$ 时, $\{a_n\}$ 一定是等差数列;

当 $C \neq 0$ 时, $\{a_n\}$ 不是等差数列, 但当 $n \geq 2$ 时, 所组成的数列是等差数列.

【例三】 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = -n^2 + 4n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 当 n 为何值时, S_n 达到最大? 最大值是多少?

4.3.2 等差数列的前n项和的性质

【学习目标】

1. 熟练地掌握等差数列的两个求和公式, 能够依据题设的不同条件, 选用适当的公式进行求和计算
2. 能依据等差数列的求和公式, 推导出与等差数列前n项和相关的某些性质
3. 通过运用公式的过程, 继续体会解题中常用到的整体思想、方程思想和数形结合思想

【重点】等差数列前n项和相关性质的推导与应用

【难点】解题中常用到的整体思想、方程思想和数形结合思想的渗透与体会

【复习引入】

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和公式:

$$S_n = \quad = \quad =$$

2. $S_n = An^2 + Bn + C$ (A, B, C 为常数) 的数列为等差数列的前提条件是_____.

性质一: 项数(下标)的“等和”性质:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(a_m + a_{n-m+1})}{2};$$

$$\text{特别地: } S_{2n-1} = \frac{(2n-1) \cdot (a_1 + a_{2n-1})}{2} = (2n-1)a_n \Rightarrow a_n = \frac{S_{2n-1}}{2n-1}$$

【例一】在等差数列 $\{a_n\}$ 中,

(1) 已知: $a_2 + a_5 + a_{12} + a_{15} = 36$, 则 $S_{16} =$ _____;

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_{1005} = \frac{1}{41}$, 则

$$S_{2009} = \text{_____};$$

(3) (2022·复旦附中高一检测) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前n项和为 S_n . 已知 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 = 0$, $S_{2m-1} = 38$, 则 $m =$ _____.

【例二】(1) 等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前n项和分别为

S_n, T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n-1}{2n+3}$, 则 $\frac{a_8}{b_8}$ 的值为_____.

(2) 有两个等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 满足

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n} = \frac{7n+2}{n+3}, \text{ 求 } \frac{a_5}{b_7} = \text{_____}.$$

【点评】

在等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 中, 前n项和分别为 A_n, B_n ,

$$\text{则有 } A_{2n-1} = (2n-1)a_n \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{A_{2n-1}}{B_{2n-1}}$$

性质二: 项的个数的“奇偶”性质:

等差数列 $\{a_n\}$ 中, 公差为 d ,

① 若共有 $2n$ (偶数) 项, 则 $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$ 且

$$S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{a_n}{a_{n+1}};$$

② 若共有 $2n-1$ (奇数) 项, 则 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$, 且

$$S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n, \frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}.$$

证明:

【例三】(1) 等差数列 $\{a_n\}$ 的前14项和为196, 其中奇数项和为91, 则 $a_8 =$ _____.

(2) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为奇数, 且奇数项的和为44, 偶数项的和为33, 求此数列的中间项及项数.

(3) 一个等差数列的前 12 项和为 354, 前 12 项中偶数项和与奇数项和之比为 32:27, 则公差为_____.

(4) 设 $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ 成等差数列, 且下标为奇数的项之和为 60, 下标为偶数的项之和为 45, 求该数列的项数.

性质三: “片断和” 性质

若 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍为等差数列(公差为 $n^2 d$)

证明:

【例四】(1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和为 30, 前 $2m$ 项和为 100, 则它的前 $3m$ 项的和为 ()

- A. 130 B. 170 C. 210 D. 260

(2) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_3 = 9, S_6 = 36$, 则 $a_7 + a_8 + a_9 =$ ()

- A. 63 B. 45 C. 36 D. 27

(3) (全国卷) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若

$$\frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{3}, \text{ 则 } \frac{S_6}{S_{12}} = ()$$

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{9}$

【例五】设方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 与方程 $x^2 - 2x + n = 0$ 的四个根可以组成首项为 $\frac{1}{4}$ 的等差数列, 试求 $|m - n|$ 的值.

【例六】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \dots + \frac{n}{n+1}$.

又 $b_n = \frac{2}{a_n a_{n+2}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(2) 求和: $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$.

【例七】已知数列 $\{q_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n + 2S_n S_{n-1} = 0 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【例八】(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 < 0, S_9 = S_{12}$, 若 $S_n \geq S_m$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 则 $m =$ _____.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为前 n 项和, 公差为 d , 若 $\frac{S_{2022}}{2022} - \frac{S_{22}}{22} = 100$, 则 d 的值为()

- A. $\frac{1}{20}$ B. $\frac{1}{10}$ C. 10 D. 20

(3) (2022 宁大附中高三模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 则数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和为_____.

(4) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 > 0$, 公差 $d < 0$, $a_5 = 3a_7$, 若 S_n 取得最大值, 则 $n =$ _____.

【例九】已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_5 = 8$, $a_4 = 2$.

①求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

②设 $T_n = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n|$, 求 T_n .

4.4.1 等比数列的定义与通项公式

【学习目标】

1. 理解等比数列的概念,能判定一个数列是否为等比数列,并掌握公比、等比中项的概念
2. 经历并掌握等比数列通项公式的推导过程及思想,体会等比数列与指数函数的关系
3. 将等比数列与等差数列做类比,分析异同点

【重点】等比数列的概念及其通项公式的推导

【难点】等比数列的函数特征的理解

【复习回顾】

1. 等差数列的定义: _____
2. 等差数列通项公式的推导方法: _____、_____

【情景引入】

1. 国际象棋起源于古代印度,关于国际象棋有一个传说。国王要奖赏国际象棋的发明者,问他有什么要求,发明者说:“请在棋盘的第一个格子里放上1粒麦子,在第2个格子里放上2粒麦子,在第3个格子里放上4粒麦子,在第4个格子里放上8粒麦子,依此类推,每个格子里放的麦子数都是前一个格子里放的麦子数的2倍,直到第64个格子。请给我足够的粮食来实现上述要求。”你认为国王有能力满足发明者上述要求吗?

由于每个格子里的麦子数都是前一个格子里的麦子数的2倍,且共有64个格子,所以各个格子里的麦粒数依次是:1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ……

2. 《庄子·天下》里有一句话“一尺之棰,日取其半,万世不竭”,如果把“一尺之棰”看成单位“1”,那么得到的数列是_____

3. 银行复利计算本利和的公式为: 本利和=本金 $\times(1+\text{利率})^{\text{存期}}$,今有1万元存入银行,年利率是1.98%,5年内各年末得到的本利和分别是_____.

★问题1: 请同学们思考,以上三个数列有什么共同的特点?

答: 发现这三个数列有一个共同特点: _____

等比数列的定义:

如果一个数列_____,
_____, 那么这个数列就叫等比数列. 这个常数叫做等比数列的_____, 通常用字母_____来表示.

☆思考:

- ①公比 q 的取值范围是什么? 每一项 a_n 的取值范围又是什么?
- ②公差 q 一定是由后项与前项之比所得;
- ③为什么要“从第二项起”, 为什么要强调“同一个常数”?
- ④存在即是等差, 又是等比的数列吗? 请例举

★问题2: 你能将等比数列的文字语言转化为数学表达式, 从而写出它的递推表示吗?

答: 等比数列的递推表达: _____

【练习1】: 判断下列数列中哪些是等比数列, 哪些不是? 如果是, 写出首项 a_1 和公比 q , 如果不是, 说明理由.

- 1). 0, 1, 2, 4, 8, 16, ……;
- 2). 5, 5, 5, 5, 5, ……;
- 3). 0, 0, 0, 0, 0, 0, ……;
- 4). 1, -1, 1, -1, 1, -1, ……;
- 5). $1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{8}, \dots$

【思考1】: 等比数列都有单调性吗?

【思考2】: 等比数列的定义能否改为: 在数列 $\{a_n\}$ 中,

若 $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ($n \in N^*$), 则 $\{a_n\}$ 是等比数列.

答: _____

★问题3: 如果等比数列 $\{a_n\}$ 首项是 a_1 , 公比是 q ($q \neq 0$), 那么这个等比数列 a_2, a_3, a_4 如何表示?
 a_n 呢?

$a_2 =$ _____

【探究一】 $a_3 =$ _____

$a_4 =$ _____

猜想: $a_n =$ _____

★问题 4: 上面求通项公式的方法叫不完全归纳法, 这种导出公式的方法不够严密, 你能给出一个更为严密的推导方法吗?

【探究二】等比数列通项公式的推导

等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为: _____.

【思考 3】: 这种方法以前见过吗? 还有其他方法吗?

★问题 5: 引例中三个数列的公比和通项公式分别为多少?

数列	公比	通项公式
1, 2, 4, 8, 16, ...		
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$		
引例三		

公式理解:

通项公式含有 a_1, q, n, a_n 这 4 个量, 已知三个量, 第 4 个量就是未知数, 通项公式就是方程, 解方程就可以求出第 4 个量。即利用方程的思想“知三可求一”。

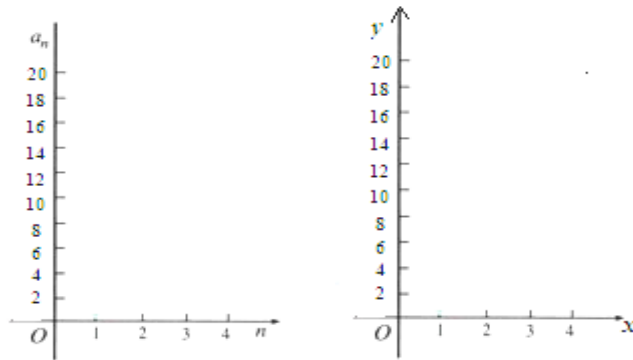
如果在 a 与 b 中间插入一个数 G , 使 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的 _____, a 与 b 的符号 _____, 且 $G =$ _____.

☆注: G 是 a 与 b 的 _____, 且 a 与 b 符号必 _____.

【探究三】(1) 等比数列 $\{a_n\}$, $a_1=1, q=2$, 则 $a_n =$ _____.

(2) 数列 $\{a_n\}$, $a_n = 2^{n-1}$ 是否为等比数列? 如何证明?

(3) 在下面左图中做出数列 $\{a_n\}$, $a_n = 2^{n-1}$ 的图像, 这个图像有什么特点?



(3) 在上面右图中做出函数 $y = 2^{x-1}$ 的图像, 将它与左图对比, 说说两者之间的异同点?

	等比数列	类指数函数
解析式	$a_n = 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$	$y = 2^{x-1}$
不同点		
相同点		

【思考 4】: 等比数列的图像一定都在类指数函数的图像上吗?

【例一】(1) $\sqrt{2}+1$ 与 $\sqrt{2}-1$ 的等比中项为 _____.
(2) 若 $a, 2a+2, 3a+3$ 成等比数列, 实数 a 的值为 _____.

(3) (多选题) 如果 $-1, a, b, c, -9$ 成等比数列, 那么()

- A. $b=3$ B. $b=-3$
C. $ac=9$ D. $ac=-9$

【例二】(1) 正项等比数列 $\{a_n\}$, 若 $3a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比 $q =$ _____.

(2) 已知等比数列 $\{a_n\}$, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 7$, $a_1 a_2 a_3 = 8$, 求 a_n .

【例三】(1) 等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项的和为 168, $a_2 - a_5 = 42$, 则 a_5, a_7 的等比中项为 _____.

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 0$, $a_4 \cdot a_5 = 32$, 则 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_8 =$ ()

- A. 10 B. 20 C. 36 D. 128

4.4.2 等比数列的性质

【学习目标】

1. 经历并掌握等比数列的主要性质的探究过程,并能利用等比数列的性质解题
2. 初步掌握等比数列的证明方法,学会利用递推关系构造等比数列
3. 能解决简单等差数列与等比数列知识综合型问题

【重点】等比数列性质的应用与等比数列的证明

【难点】等差数列与等比数列知识综合型问题的求解

【复习回顾】

1、等比数列与指数函数的关系

等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 q^{n-1}$, 还可以整理为 $a_n = \frac{a_1}{q} q^n$, 当 $q > 0$ 且 $q \neq 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 是指数函数 $f(x) = \frac{a_1}{q} q^x (x \in \mathbf{R})$ 当 $x = n$ 时的函数值, 即 $a_n = f(n)$ (如图所示). 因此等比数列 $\{a_n\}$ 的图象是函数 $f(x) = \frac{a_1}{q} q^x (x \in \mathbf{R})$ 图象上的一群孤立的点.

2、等比数列的单调性

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 则

(1) 当 $\begin{cases} a_1 > 0, \\ q > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 < 0, \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列;

(2) 当 $\begin{cases} a_1 > 0, \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 < 0, \\ q > 1 \end{cases}$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;

(3) 当 $q = 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为常数列(这个常数列中各项均不等于0);

(4) 当 $q < 0$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列(它所有的奇数项同号, 所有的偶数项也同号, 但是奇数项与偶数项异号).

★问题1: 等比数列的性质有哪些? 如何利用性质解题?

【小结】: 等比数列 $\{a_n\}$ 的性质

(1) 通项公式的推广: $a_n = a_m \cdot q^{n-m}$;

(2) 若 $m+n=p+q$, 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$;

(3) 若 $k \neq 0$, 则 $\{ka_n\}$ 、 $\{|a_n|\}$ 也是等比数列;

(4) 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等比, 则 $\{a_n \cdot b_n\}$ 也是等比数列;

(5) 若 $\{a_n\}$ 等比且 $a_n > 0$, 则 $\{\log_a a_n\}$ 是等差数列;

(6) $\{a_{2n}\}, \{a_{2n-1}\}, \{a_{3n-1}\}, \{a_{3n-2}\}, \{a_{4n}\}$ 都是等比数列;

(7) 等比数列的增减性: _____.

【探究五】(1) 若 $m+n=2p (m, n, p \in \mathbf{N}^*)$,

则 $a_m a_n = a_p^2$.

(2) 若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等比数列, 公比分别为 q_1, q_2 , 证明 $\{a_n \cdot b_n\}$ 也是等比数列, 并求出公比 Q .

证明:

【例一】(1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 如果公比为 q , 且 $q < 1$, 那么等比数列 $\{a_n\}$ 是()

- A. 递增数列 B. 递减数列
C. 常数列 D. 无法确定单调性

(2) (2022·辽宁沈阳期中) 已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_2 a_3 = 5$, $a_7 a_8 a_9 = 10$, 则 $a_4 a_5 a_6 =$ ()

- A. $5\sqrt{2}$ B. 7
C. 6 D. $\pm 5\sqrt{2}$

(3) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0, n=1, 2, \dots$, 且 $a_5 a_{2n-5} = 2^{2n} (n \geq 3)$, 则当 $n \geq 1$ 时, $\log_2 a_1 + \log_2 a_3 + \dots + \log_2 a_{2n-1} =$ ()

- A. $n(2n-1)$ B. $(n+1)^2$
C. n^2 D. $(n-1)^2$

(4) 在由正数组成的等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知

$a_1 + a_2 = 1, a_3 + a_4 = 4, a_4 + a_5 =$ _____.

【例二】(1) 在1, 16之间插入3个数, 使它们成等比数列, 则这三个数为_____.

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差不为零, 首项 $a_1 = 1$, a_2 是 a_1 和 a_5 的等比中项, 则数列 $\{a_n\}$ 的前10项之和是

()

A. 90 B. 100 C. 145 D. 190

(3) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = -8, a_2 = -6$. 若将 a_1, a_4, a_5 都加上同一个数, 所得的三个数依次成等比数列, 则所加的这个数为_____.

★问题 2: 等比数列的通项常有哪些设法?

【例三】已知四个数前三个成等差数列, 后三个成等比数列, 中间两数之积为 16, 首尾两个数之积为 -128, 求这四个数.

【例四】(1) 有四个数成等比数列, 将这四个数分别减去 1, 1, 4, 13, 则成等差数列, 则这四个数为_____.

(2) 三个互不相等的数成等差数列, 如果适当排列三个数, 又可成为等比数列, 这三个数的和为 6, 则这三个数为_____.

【例五】已知三角形的三边长成等比数列, 求此等比数列的公比的取值范围.

【例六】(1) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, 且 $a_n > 0, a_2 a_4 + 2a_3 a_5 + a_4 a_6 = 25$, 那么 $a_3 + a_5 =$ ()

A. 5 B. 10
C. 15 D. 20

(2) 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列, 公比 $q=2$, 且 $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{30} = 2^{30}$, 那么 $a_3 a_6 a_9 \cdots a_{30}$ 等于(B)

A. 2^{10} B. 2^{20}
C. 2^{16} D. 2^{15}

(3) 已知各项都为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 a_4 = 4$, $a_1 + a_2 + a_3 = 14$, 则满足 $a_n a_{n+1} a_{n+2} > \frac{1}{9}$ 的最大正整数 n 的值为_____.

【例七】(山东卷) 已知数列的首项 $a_1 = 5$, 前 n 项和为 S_n , 且 $S_{n+1} = 2S_n + n + 5 (n \in \mathbb{N}^*)$,

(1) 证明 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列.

(2) 求数列前 20 项的和.

【点评】证明数列为等比数列的方法

法 1: 利用定义 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q (n \in \mathbb{N}^*)$;

法 2: 证任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$.

【例八】已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 9, 3a_{n+1} + a_n = 4$, 求该数列的通项公式 a_n .

4.5.1 等比数列的前 n 项和

【学习目标】

1. 理解探索等比数列前 n 项和公式推导中的“错位相减”法
2. 理解等比数列前 n 项和公式的使用条件，能利用公式求解已知等比数列的前 n 项和
3. 了解等比数列前 n 项和公式的其他推导方法

【重点】等比数列前 n 项和公式的推导与简单应用

【难点】公式推导中的“错位相减”法的构造

【复习回顾】

- (1) 等比数列的递推关系: _____
- (2) 等差数列的前 n 项和的求解方法: _____

【情景引入】

话说猪八戒自西天取经回到了高老庄，从高员外手里接下了高老庄集团，摇身变成了 CEO。可好景不长，便因资金周转不灵而陷入了窘境，急需大量资金投入，于是就找孙悟空帮忙。悟空一口答应：“行！我每天投资 100 万元，连续一个月（30 天），但是有一个条件是：作为回报，从投资的第一天起你必须返还给我 1 元，第二天返还 2 元，第三天返还 4 元……即后一天返还数为前一天的 2 倍。”八戒听了，心里打起了小算盘：“第一天：支出 1 元，收入 100 万；第二天：支出 2 元，收入 100 万，第三天：支出 4 元，收入 100 万元；……哇，发财了……”心里越想越美……再看看悟空的表情，心里又嘀咕了：“这猴子老是欺负我，会不会又在耍我？”

★问题 1：假如你是高老庄集团企划部的高参，请你帮八戒分析一下，按照悟空的投资方式，30 天后，八戒能吸纳多少投资？又该返还给悟空多少钱？

★问题 2：如何求 $S_{30} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{29}$ 。

（引导思考：式子有什么特征，能否构造成等差数列前 n 项和形式）

【探究一】 $S_{30} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{29} = ?$

★问题 3：那么对于一个一般的等比数列 $\{a_n\}$ ，已知首项 a_1 ，公比为 q ，如何求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n ？

【探究二】 $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \cdots + a_1q^{n-1} = ?$

【方法 1】错位相减法

★问题 4：当 $q = 1$ 时，等比数列的前 n 项和 S_n 怎么求？

等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，

(1) 当公比 $q \neq 1$ 时， $S_n = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) 当 $q = 1$ 时， $S_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

★问题 5：除了用“错位相减法”来推导等比数列的前 n 项和公式，还有其他的方法吗？

【探究三】探索等比数列前 n 项和公式其他推导方法

【方法 2】提取公比 q

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$= a_1 + q(\hspace{10em})$$

【方法3】利用等比性质

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q = \frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}$$

【练习1】口答：

在公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 中

(1) 若 $a_1 = \frac{2}{3}, q = -\frac{1}{3}$, 则 $S_n =$ _____

(2) 若 $a_1 = 1, q = 1$, 则 $S_n =$ _____

【练习2】判断正误：

① $1 - 2 + 4 - 8 + \dots + (-2)^{n-1} = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2}$ ()

② $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2}$ ()

③ $1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$ ()

【探究三】等比数列前 n 项和公式与其公比 q 的关系

(1) 当公比 $q \neq 1$ 时, 等比数列的前 n 项和公式是 $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$, 它可以变形为 $S_n = -\frac{a_1}{1 - q}q^n + \frac{a_1}{1 - q}$,

设 $A = \frac{a_1}{1 - q}$, 则上式可写成 $S_n = -Aq^n + A$ 的形式.

则数列 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ 的图象是函数 $y = -Aq^x + A$ 图象上的一群孤立的点.

由此可见, 非常数列的等比数列的前 n 项和 S_n 是一个关于 n 的指数型函数与一个常数的和, 且指数型函数的系数与常数项互为相反数.

(2) 当公比 $q = 1$ 时, 因为 $a_1 \neq 0$, 所以 $S_n = na_1$, 则数列 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ 的图象是正比例函数 $y = a_1x$ 图象上的一群孤立的点.

【思考1】: 如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = -Aq^n + A$ ($Aq \neq 0, q \neq 1, n \in \mathbf{N}_+$), 那么这个数列一定是等比数列吗?

【思考2】: 等差数列前 n 项和所在函数过原点, 等比数列前 n 项和所在函数也过原点吗?

答: _____

【练习3】等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 点 (n, S_n) 在函数 $y = 3^{x+1} + m$ 的图象上, 则 $m =$ _____.

【探究四】等比数列前 n 项和的性质

(1) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 $S_{n+m} = S_n + q^n S_m$.

(2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 当项数为 $2n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时, $\frac{S_{2n}}{S_n} = q^n$.

(3) $\{a_n\}$ 是公比不为 -1 的等比数列, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 仍成等比数列, 其公比为 q^n .

【例一】求等比数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 的第5项到第10项的和.

【点评】

方法1: 观察、发现: $a_5 + a_6 + \dots + a_{10} = S_{10} - S_4$.

方法2: 此等比数列的连续项从第5项到第10项构成一个新的等比数列: 首项为 $a_5 = 16$, 公比为 $q = 2$, 项数为 $n = 6$.

【例二】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比为 q , 前 n 项和为 S_n . 求解下列问题:

(1) 若 $a_1 = 8, a_n = \frac{1}{4}, S_n = \frac{63}{4}$, 求 n ;

(2) 若 $S_3 = \frac{7}{2}, S_6 = \frac{63}{2}$, 求 a_n 及 S_n ;

(3) 若 $a_6 - a_4 = 24, a_3 a_5 = 64$, 求 S_8 ;

(4) 若 $a_3 = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{9}{2}$, 求 a_1 与 q .

4.5.2 等比数列的前 n 项和的性质

【学习目标】

1. 理解等比数列求和公式的两种情况, 能够依据公比 q 的取值范围, 选用适当的公式进行求和计算
2. 掌握等比数列“片段和”性质, 会判断一个数列是等比数列
3. 会用错位相减法求解相关数列求和问题

【重点】等比数列前 n 项和相关性质的推导与应用

【难点】用错位相减法进行数列求和

【复习回顾】

1. 若等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 则前 n 项和 $S_n =$ _____.
2. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n - c$, 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则 c 等于_____.

★问题 1: 你能否类比等差数列, 得到等比数列如下有关性质:

(1) 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 为其前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, \dots$ 仍构成等比数列, 公比为_____, 且有 $(S_{2n} - S_n)^2 = S_n \cdot (S_{3n} - S_{2n})$;

【推导】

(2) 若某数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和公式为 $S_n = a^n - 1$,

($a \neq 0, a \neq \pm 1, n \in N^*$), 则 $\{a_n\}$ 成等比数列;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则有

$$S_{n+m} = S_n + q^n \cdot S_m;$$

【推导】

(4) 在公比为 q 的等比数列中, 若项数为 $2n$

($n \in N^*$), 则有 $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = q$.

【推导】

【例一】等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $S_{10} = 10$, $S_{20} = 30$, 求 S_{30} .

【例二】 (1) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_2 = 7, S_6 = 91$, 则 S_4 为_____.

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 0$, $S_3 = 6$, $a_7 + a_8 + a_9 = 24$, 则 $S_{99} =$ _____.

【例四】 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2S_n$, ($n \in N^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n ;

(2) 求数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【例三】一个等比数列的首项为 1, 项数是偶数, 其奇数项的和为 85, 偶数项的和为 170, 求此数列的公比和项数.

(补充)4.5.3 求数列的通项公式

【知识点】

1、数列通项公式的求法

$$(1) S_n \text{ 法, 即 } a_n = \begin{cases} a_1 (n=1) \\ S_n - S_{n-1} (n \geq 2) \end{cases};$$

(2) 构造辅助数列法;

①形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ (其中 p, q 为常数) 的数列可采用待定系数法化为 $(a_{n+1} + k) = p(a_n + k)$ 形式;

②形如 $a_{n+1} = pa_n + q^{n+1}$ (其中 p, q 为常数) 的数列可两边同除以 p^{n+1} 化为 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{a_n}{p^n} = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}$ 形式;

③形如 $a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ (其中 p, q 为常数) 的数列可采用待定系数法化为 $(a_{n+1} + ka_n) = (p+k)(a_n + ka_{n-1})$ 的形式;

④形如 $a_{n+1} = \frac{a_n}{p + qa_n}$ (其中 p, q 为常数) 的数列可

以通过两边取倒数转化为 $\frac{1}{a_{n+1}} = p \cdot \frac{1}{a_n} + q$ 的形式.

(3) 累加、累乘法:

累加法: 递推公式满足: $a_{n+1} = a_n + g(n)$ 型或

$a_n = a_{n-1} + f(n) (n \geq 2)$ 型;

累乘法: 递推公式满足: $a_{n+1} = f(n)a_n$ 型或

$a_n = g(n)a_{n-1} (n \geq 2)$ 型.

(4) 作差(商)法

(5) 迭代法

【典例剖析】

★题型一: S_n 法

【例一】已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 $S_n = 3n^2 + 2n + 1$, 求 a_n .

【知识点1】: 对于一个函数 $f(x)$, 我们把满足 $f(m)=m$ 的值 $x=m$ 称为函数 $f(x)$ 的“不动点”. 利用“不动点法”可以构造新数列, 求数列的通项公式.

★题型二: 构造辅助数列 ($a_{n+1} = pa_n + q$ 型)

【例二】若 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1, (n \geq 1)$, 求该数列的通项公式.

★题型三: 构造辅助数列 ($a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ 型)

【例三】已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{2}{3}, a_{n+1} = \frac{7a_n - 2}{a_n + 4}$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【点评】: (1) 若 $f(x) = ax + b (a \neq 0, 1)$, p 是 $f(x)$ 的不动点. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n)$, 则 $a_{n+1} - p = a(a_n - p)$, 即 $\{a_n - p\}$ 是公比为 a 的等比数列.

(2) 设 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} (c \neq 0, ad-bc \neq 0)$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f(a_n), a_1 \neq f(a_1)$. 若 $f(x)$ 有两个相异的不动点 p, q , 则 $\frac{a_{n+1}-p}{a_{n+1}-q} = k \frac{a_n-p}{a_n-q}$ (此处 $k = \frac{a-pc}{a-qc}$).

★题型四: 构造辅助数列 ($a_{n+1} = pa_n + q^{n+1}$ 型)

【例四】已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【知识点2】: 形如 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, (p, q 是常数) 的数列:

形如 $a_1 = m_1, a_2 = m_2, a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ (p, q 是常数) 的二阶递推数列都可用特征根法求得通项 a_n , 其特征方程为 $x^2 = px + q \cdots \textcircled{1}$

若 $\textcircled{1}$ 有二异根 α, β , 则可令 $a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ (c_1, c_2 是待定常数)

若 $\textcircled{1}$ 有二重根 $\alpha = \beta$, 则可令 $a_n = (c_1 + nc_2)\alpha^n$ (c_1, c_2 是待定常数)

再利用 $a_1 = m_1, a_2 = m_2$, 可求得 c_1, c_2 , 进而求得 a_n .

★题型五: 构造辅助数列 ($a_{n+1} = pa_n + qa_{n-1}$ 型)

【例五】已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 5, a_2 = 2, a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n, n \geq 3$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

[变式]: 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_2 = 2, 4a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, (n \in \mathbf{N}^*)$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n .

★题型六: 累加法 (形如 $a_{n+1} = a_n + g(n)$ 形式)

【例六】已知 $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 求 a_n .

★题型七: 累乘法 (形如 $a_{n+1} = f(n)a_n$ 形式)

【例七】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+1} = 2^n a_n$, 求 a_n .

★题型八: 作差 (商) 法

【例八】(1) 若数列 $\{a_n\}$ 满足

$\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{2^n}a_n = 2n + 5$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 以后各项由公式 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2$ 给出, 则 $a_n =$ _____。

(补充)4.5.4 数列求和的常见方法

【知识点】

1. 等差、等比数列的求和公式:

$$\text{等差数列: } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

等比数列: $q=1$ 时, $S_n = na_1$;

$$q \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}$$

2. 数列求和常用方法: 公式法、分组求和法、倒序相加法、错位相减法、裂项相消法、构造法。

3. 常用的几个求和公式:

$$\textcircled{1} 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\textcircled{2} 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$$

$$\textcircled{3} 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

$$\textcircled{4} 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\textcircled{5} 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$\textcircled{6} 1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+\cdots+n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

4. 常用的裂项技巧有:

$$\textcircled{1} \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

★题型一: 公式法求和

【例一】 求和:

$$(1) \quad 3+33+333+\cdots+3\cdots3;$$

$$(2) \quad 1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \cdots + n(3n+1).$$

★题型二: 分组求和法

【例二】 求和:

$$S_n = \frac{3+2}{6} + \frac{3^2+2^2}{6^2} + \frac{3^3+2^3}{6^3} + \cdots + \frac{3^n+2^n}{6^n}.$$

★题型三: 倒序相加法

$$\text{【例三】求值: } S_{10} = \frac{1^2}{1^2+10^2} + \frac{2^2}{2^2+9^2} + \cdots + \frac{10^2}{10^2+1^2}$$

★题型四：错位相减法

【例四】 已知 $a_n = 2n+1$, $b_n = \frac{1}{2^n}$, 令 $c_n = a_n b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

$$(2) \text{ 求 } S_n = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2.$$

$$(3) \text{ 求和: } \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

★题型五：裂项相消法

【例五】 求和:

$$(1) 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$$

$$(4) \text{ 已知数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } S_n, a_1 = \sqrt{2},$$

$$a_n > 0, a_{n+1} \cdot (S_{n+1} + S_n) = 2.$$

① 求 S_n .

$$\text{② 求 } \frac{1}{S_1+S_2} + \frac{1}{S_2+S_3} + \dots + \frac{1}{S_n+S_{n+1}}.$$

选修2 第五章、一元函数的导数及其应用

5.1.1 变化率问题

【学习目标】

1. 理解平均变化率的概念, 了解平均变化率的几何意义
2. 会求函数在某点处附近的平均变化率

【重点】平均变化率的概念、函数在某点处附近的平均变化率

【难点】平均变化率的概念及几何意义

【情境引入】

为了描述现实世界中运动、过程等变化着的现象, 在数学中引入了函数, 随着对函数的研究, 产生了微积分, 微积分的创立以自然科学中四类问题的处理直接相关:

- 一、已知物体运动的路程作为时间的函数, 求物体在任意时刻的速度与加速度等;
- 二、求曲线的切线;
- 三、求已知函数的最大值与最小值;
- 四、求长度、面积、体积和重心等.

导数是微积分的核心概念之一它是研究函数增减、变化快慢、最大(小)值等问题最一般、最有效的工具. 导数研究的问题即变化率问题: 研究某个变量相对于另一个变量变化的快慢程度.

★问题 1: 高台跳水运动员的速度

在一次高台跳水运动中, 运动员相对于水面的高度 h (单位: m) 与起跳后的时间 t (单位: s) 存在函数关系

$$h(t) = -5t^2 + 5t + 10.$$

问运动员在下降的过程中, 下降的速度是恒定的吗? 是越来越快还是越来越慢? 你能用运动员在某些时间段内的平均速度 $\bar{v}$ 粗略地描述其运动状态吗?

【分析】: 因为运动员到达最高点的时间为 $0.5s$, 之后开始下降, 所以

$$\bar{v} = \frac{h(1) - h(0.5)}{1 - 0.5} = \quad (m/s)$$

$$\bar{v} = \frac{h(1.5) - h(1)}{1.5 - 1} = \quad (m/s)$$

$$\bar{v} = \frac{h(2) - h(1.5)}{2 - 1.5} = \quad (m/s)$$



可以看出, 运动员在跳水下降的过程中, 他的平均速度在不断地_____.

【思考 1】: 当时间从 t_1 增加到 t_2 时, 运动员在这段时间里的平均速度是多少? 用平均速度反映运动员在这一段里的运动状态准确吗?

答: _____

我们把物体在某一时刻的速度称为_____

【思考 2】: 瞬时速度与平均速度有什么关系? 如何求解运动员在 $t=1s$ 时的瞬时速度?

$$\text{解: } \because \bar{v} = \frac{h(1+\Delta t) - h(1)}{(1+\Delta t) - 1} =$$

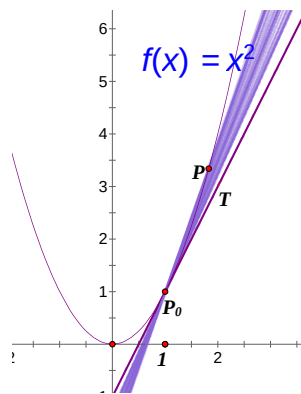
可以发现, 当 Δt 无限趋近于 0 时, $\bar{v}$ 无限趋近于____, 所以我们将这里的极限值____就称作是运动员在 $t=1s$ 时的瞬时速度.

【思考 3】: 求解运动员在 $t=2s$ 时的瞬时速度? 如何求运动员从起跳到入水过程中在某一时刻 t_0 的瞬时速度?

★问题 2: 抛物线的切线的斜率

你能定义抛物线 $f(x) = x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线吗? 那又如何定义幂函数 $f(x) = x^3$ 在原点 $O(0,0)$ 处的切线呢?

我们发现, 当点 P 无限趋近于点 P_0 时, 割线 P_0P 无限趋近于一个确定的位置, 这个确定位置的直线 P_0T 称为抛物线 $f(x) = x^2$ 在点 $P_0(1,1)$ 处的切线.



$$\text{割线 } P_0P \text{ 的斜率 } k = \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{(1+\Delta x) - 1} =$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{(1+\Delta x) - 1} = \quad, \text{因此, 切线 } P_0T \text{ 的}$$

斜率 $k_0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

★问题 3: 如果上述两个问题中的函数关系用 $y = f(x)$ 表示, 那么问题中的变化率应该用什么样的式子来表示?

【分析】: 在自变量从 x_0 增大到 $x_0 + \Delta x$ 的过程中, 问题中的变化率可表示为:

我们把这个式子称为函数 $y = f(x)$ 从 x_0 到 $x_0 + \Delta x$

的平均变化率. 记作 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

☆注: 1. 这里 Δx 看作是对于 x_0 的一个“增量”;

$$2. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

3. 所谓平均变化率也就是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的增量与 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的增量的比值.

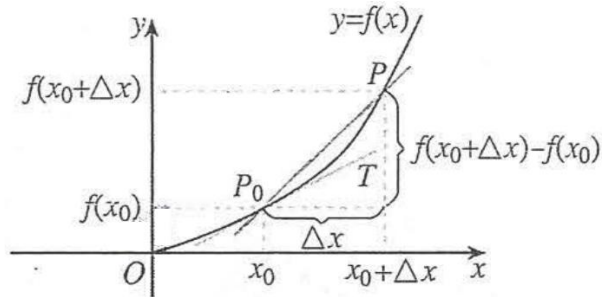
如果当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于一个确定的值, 即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限, 则称 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处可

导, 并把这个确定的值叫做 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的导数 (也称 瞬时变化率), 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$, 即

$$f'(x_0) = \quad = \quad$$

★问题 4: 观察函数 $f(x)$ 的图象 (如下图),

平均变化率 $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0}$ 表示什么?



平均变化率的几何意义: $\underline{\hspace{2cm}}$

★问题 5: (如上图) 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 瞬时变化率

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \text{ 表示什么?}$$

瞬时变化率的几何意义: $\underline{\hspace{2cm}}$

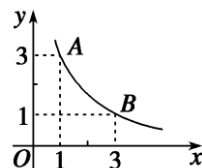
【思考 4】: $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 在区间 $[m, n]$ 上的平均变化率有什么特点? 为什么?

答: $\underline{\hspace{2cm}}$

【练习 1】: 已知函数 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -2x$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-3, -1]$ 上的平均变化率为 $\underline{\hspace{2cm}}$, $g(x)$ 在区间 $[0, 5]$ 上的平均变化率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【例一】(1) 如图所示, 函数 $y = f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的平均变化率为()

- A. 1 B. -1
C. 2 D. -2



(2) 已知一物体的运动方程为 $y = f(t) = 2t^2 + 1$, 其中 t 的单位是 s, 路程单位为 m, 那么物体在时间 $[1, 1 + \Delta t]$ 内的平均速度为()

- A. 4 B. $4\Delta t$ C. $4 + 2\Delta t$ D. $2\Delta t$

【例二】求曲线 $y = -2x^2 + 1$ 在点 $(1, -1)$ 处的切线方程.

5.1.2 导数的几何意义

【学习目标】

1. 理解导数的几何意义, 体会用导数的几何意义分析图象上点的变化情况的方法

2. 会求简单曲线在某点的切线斜率及切线方程

【重点】理解导数的几何意义

【难点】导数的几何意义的简单应用

【复习引入】

函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率为:

我们称它为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的**导数**, 记作

$$f'(x_0) \text{ 或 } y'|_{x=x_0},$$

$$\text{即 } f'(x_0) = \quad = \quad .$$

★说明: (1) Δx 是自变量 x 在 x_0 处的改变量, 所以 Δx 可正可负, 但 $\Delta x \neq 0$; Δy 是函数值的改变量, 可以为 0;

(2) 函数的导数即为函数 $y = f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的瞬时变化率, 它反映的函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处变化的快慢程度, 也就是在该点的函数值改变量与自变量改变量之比的极限;

(3) 函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 是指 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有极限, 如果 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在极限, 就说函数在点 x_0 处不可导, 或说无导数;

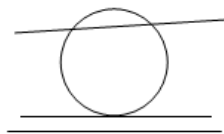
(4) $f'(x_0)$ 可以有不同的表达方式, 如:

$$y'|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} .$$

【思考】: 联想到平均变化率的几何意义, 瞬时变化率 (即“导数”) 又有怎样的意义?

从函数图象上看, 函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处导数的意义为: _____

★问题 1: 平面几何中我们怎样判断直线是否是圆的切线? 能否将圆的切线的定义推广为一般的曲线的切线定义?



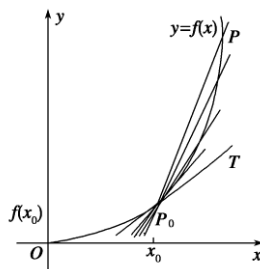
【引导思考 1】: 存不存在一般的曲线与直线只有一个交点但不相切? 如有, 请画出示例.

【引导思考 2】: 存不存在一般的曲线与直线相切但不止一个公共点? 如有, 请画出示例.

【引导思考 3】: 通过上两问可以发现直线与曲线的公共点的个数不能用来定义一般曲线的切线. 我必须用新的方法来定义曲线的切线. 那对于一般的曲线与直线相切的定义应如何表达?

问题 2: 如下图, 当 $P_n(x_n, f(x_n)) (n=1, 2, 3, 4)$ 沿着曲线 $f(x)$ 趋近于点 $P(x_0, f(x_0))$ 时, 割线 PP_n 的变化趋势是什么?

通过观察下图, 我们发现, 当点 P_n 沿着曲线无限接近点 P 即 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 割线 PP_n 趋近于确定的位置, 这个确定位置的直线 PT 称为曲线在点 P 处的_____.



★问题 3: 割线 PP_n 的斜率 k_n 与切线 PT 的斜率 k 有什

么关系? 切线 PT 的斜率 k 为多少?

答: 割线 PP_n 的斜率是 $k_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$, 当点

P_n 沿着曲线无限接近点 P 时, k_n 无限趋近于切线 PT 的斜率 k , 即 $k = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n$.

曲线在一点处的切线定义:

当点 P_n 沿曲线趋近于点 P 时, 割线 P_nP 绕点 P 转动, 它的最终位置为直线 PT , 这条直线 PT 叫做此曲线在点 P 的切线。

☆注: 这个概念: ①提供了求曲线上某点切线的斜率的一种方法; ②切线斜率的本质—函数在 $x = x_0$ 处的导数 (导数的几何意义)。

【练习 1】下列命题:

- ①与曲线只有一个交点的直线是曲线的一条切线;
- ②与封闭曲线只有一个交点的直线叫做曲线的切线;
- ③切线是割线的一个交点趋近于另一个交点的极限位置;
- ④函数在一点处的导数 $f'(x_0)$ 是一个常数, 不是变量。

其中正确的个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

★问题 4: 我们如何确定切线的方程?

答: 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为

导函数的定义:

由函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处求导数的过程可以看到, 当 $x = x_0$ 时, $f'(x_0)$ 是一个确定的数, 那么, 当 x 变化时, $f'(x)$ 便是关于 x 的一个函数, 我们称它为 $f(x)$ 的导函数. 记作: $f'(x)$ 或 y' ,

$$\text{即: } f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(☆注: 在不致发生混淆时, 导函数也简称导数.)

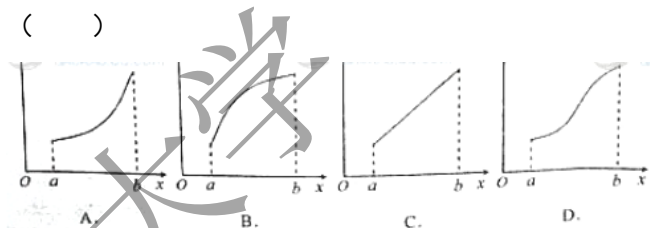
★问题 5: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 、函数的导数、导函数 $f'(x)$ 之间的有什么区别和联系?

(1) 函数在一点处的导数 $f'(x_0)$, 就是在该点的函数的改变量与自变量的改变量之比的极限, 它是一个常数, 不是变数;

(2) 函数的导数, 是指某一区间内任意点 x 而言的, 就是函数 $f(x)$ 的导函数;

(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值, 这也是求函数在点 x_0 处的导数的方法之一。

【练习 2】若函数 $y = f(x)$ 导函数在区间 $[a, b]$ 是增函数, 则函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图象可能是 ()



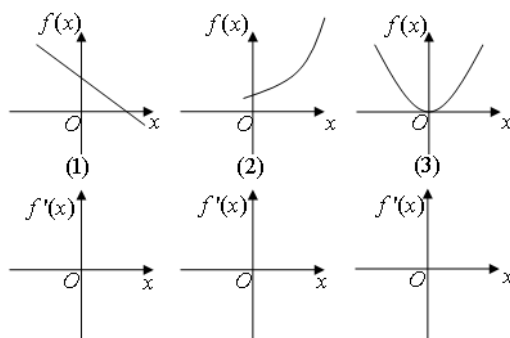
【练习 3】设曲线 $y = f(x)$ 在某点处的导数值为负, 则过该点的曲线的切线的倾斜角 ()

- A. 大于 90° B. 小于 90°
C. 不超过 90° D. 大于等于 90°

【例一】求函数 $y = x^3$ 的导函数.

【例二】求曲线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $(4, 2)$ 处的切线.

【例三】已知函数 $f(x)$ 的图象如图, 试画出其相应导函数 $f'(x)$ 的图象的大致形状.



5.2.1 基本初等函数的导数及求导法则

【学习目标】

1. 理解并掌握几个初等函数的导数公式
2. 通过对导函数每一个值几何意义的分析, 对于任给的函数 $f(x)$ 要能够画出其导函数的大致情形, 并利用此种方法对 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的导函数进行猜想

【重点】利用特殊到一般的数学思想猜想幂函数 $y = x^n$ 求导公式

【难点】原函数与其导函数在图象上的联系

【问题引入】 对于一个确定的函数 $y = f(x)$, 如何求它的导数呢?

根据导数的定义, 求函数 $y = f(x)$ 的导数, 就是当 Δx 趋近于 0 时, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 所趋近的那个定值 (切线的斜率).

【探究】 你能计算出下列常用初等函数的导数吗? 同时根据图象验证其几何意义, 并说明曲线是如何变化的?

★问题 1: 写出下列函数的导数

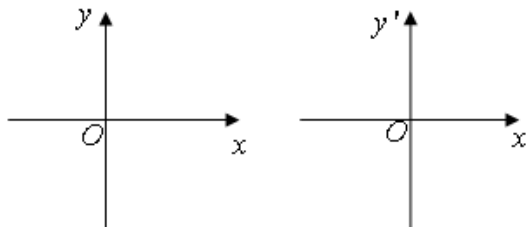
$f(x) = c$	$f'(x) =$
$f(x) = kx$	$f'(x) =$
$f(x) = x^2$	$f'(x) =$
$f(x) = x^3$	$f'(x) =$

【思考 1】: 观察 $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ 的导数, 你能发现有什么规律吗? 学有余力的同学请用“二项式定理”相关知识 (选修 3) 证明你发现的规律.

结论: 若 $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $f'(x) =$

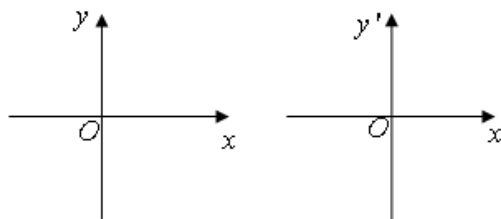
★问题 2: 求函数 $y = f(x) = \frac{1}{x}$ 的导数

【思考 2】: 画出函数 $y = f(x) = \frac{1}{x}$ 及其它的导函数的图象并对比说明它们的变化情况, 你有什么体会?



★问题 3: 求函数 $y = f(x) = \sqrt{x}$ 的导数

【思考 3】: 根据导数的几何意义画出函数 $y = f(x) = \sqrt{x}$ 的导函数的大致图象, 并与计算的结果进行对比, 看看你自己画的对不对?



【思考 4】: 观察函数 $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ 和函数

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ 的导数的式子的形式, 它们是否满足上面 $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 的导数的规律, 你能把这个结论进行适当的推广吗?

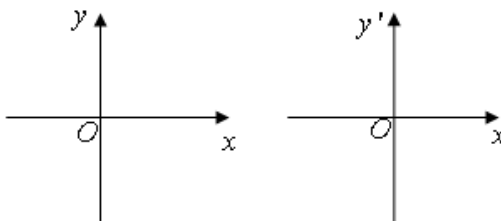
推广: 幂函数的导数公式

若 $f(x) = x^n$ (), 则 $f'(x) =$

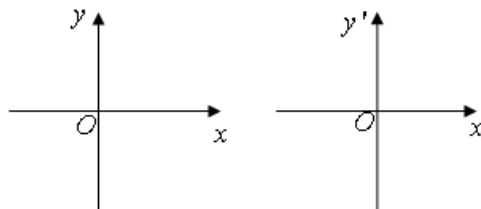
【练习 1】: 若函数 $y = \sqrt[3]{x^2}$, 则 $y' =$

【练习 2】: 求曲线 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ 在点 $(8, \frac{1}{4})$ 处的切线方程.

★问题 4: 根据函数 $y = f(x) = \sin x$ 的图象, 画出它的导函数的草图, 根据草图你能猜测出它的解析式吗? 并通过计算进行验证.



【思考 5】 你用同样的方法能够得到 $y = f(x) = \cos x$ 的导函数吗?



几种常用函数的导数公式

原函数	导函数
$f(x) = c$	$f'(x) =$
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{Q}^*)$	$f'(x) =$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) =$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) =$

除了以上四个公式, 在今后我们还将遇到下面几种初等函数的求导问题, 这里直接给出公式, 大家只要记忆公式会利用公式直接求导即可:

原函数	导函数
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} (a > 0)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

☆注: 这四个公式中 $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 比较好记

(直接记忆), 另两个公式记忆比较难, 可利用后续的学习学会它们的推导, 然后理解记忆.

【例一】求下列函数的导数:

(1) 若 $y = -\cos x$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 若 $y = 3^x$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 若 $y = x\sqrt{x}$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$;

(4) 若 $y = \log_4 x$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

★问题 5: 我们知道 $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, 那么函数 $f(x) = x^3 + x^2$ 的导数是什么?

(提示: 可利用定义)

【引导思考 1】: 根据上式的计算结果, 你有什么发现?

答: $(x^3 + x^2)' = \underline{\hspace{2cm}}$, 猜想:

【引导思考 2】: 对上述猜想进行证明?

[推导]: 令 $y = f(x) + g(x)$, 则在区间 $[x, x + \Delta x]$ 上,

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

求导法则一:

设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是可导的, 则

$$(f(x) \pm g(x))' = \underline{\hspace{2cm}}$$

★问题 6: 既然两个函数的加减运算可以用求导法则进行计算, 对于两个函数的乘除运算是否也有其法则进行计算?

【引导思考 3】: $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 正确

吗? 请举例说明.

答: 上式是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的.

反例:

【引导思考 4】: 对于 $(f(x) \cdot g(x))'$ 该如何求解?

[推导]: 令 $y = f(x) \cdot g(x)$, 则在区间 $[x, x + \Delta x]$ 上,

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

求导法则二:

设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是可导的, 则

$$(f(x) \cdot g(x))' = \underline{\hspace{2cm}}$$

【引导思考 6】: 对于 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$ 该如何求解?

[推导]: 令 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, 则在区间 $[x, x + \Delta x]$ 上,

$$\therefore y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

求导法则三:

设函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 是可导的, 则

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \underline{\hspace{2cm}} \quad (g(x) \neq 0)$$

几个结论:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

1. 公式的简单形式: $(uv)' = \underline{\hspace{2cm}}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. 若 c 为常数, 则 $(c \cdot f(x))' = \underline{\hspace{2cm}}$

3. 若 a 、 b 为常数, 则 $[af(x) \pm bg(x)]' = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 当 $f(x) = 1$ 时, 则 $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \underline{\hspace{2cm}}$

5.2.2 简单复合函数的导数

【学习目标】

1. 了解复合函数的含义, 会指出简单复合函数的复合过程
2. 能正确地运用复合函数的求导法则求解复合函数的导数

【重点】复合函数求导法则的推导与运用

【难点】对复合函数进行准确分层并运用法则求导

【复习引入】

1. 几种常用函数的导数公式

原函数	导函数
$f(x) = x^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} (a > 0)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 导数运算的法则:

法则一	$(u \pm v)' = \underline{\hspace{2cm}}$
法则二	$(u \cdot v)' = \underline{\hspace{2cm}}$
法则三	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \underline{\hspace{2cm}}$
	$(cf(x))' = \underline{\hspace{2cm}}$

【例一】求下列函数的导数:

(1) $y = x^4 - 3x^2 - 5x + 6$;

(2) $y = (x+1)(x+2)$;

(3) $y = \frac{x-1}{x+1}$;

(4) $y = \sin x(1 + \cos x)$.

★问题1: 如何求函数 $y = \ln(2x-1)$ 的导数呢?

【引导思考1】: 这个问题能否用导数运算规律进行求解? 这是一种什么样的函数类型?

一般地, 对于两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$, 如果通过变量 u , y 可以表示成 x 的函数, 那么称这个函数为函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的_____.

记作: _____

☆注: 如函数 $y = \ln(2x-1)$ 由 $y = \ln u$ 和 $u = 2x-1$

$(x > \frac{1}{2})$ 复合而成, 又如函数 $y = (2x+3)^2$ 可以看成 $y = u^2$ 和 $u = 2x+3$ 复合而成.

【引导思考2】: 复合函数的导数应如何求解?

[推导]: 从定义出发, 设 x 的增量为 Δx , 则对应的 u 、 y 的增量分别为 Δu 、 Δy , 因为 $u = g(x)$ 在点 x 处可导, 所以 $u = g(x)$ 在点 x 处连续, 因此当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时,

 $\Delta u \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$, 当 $\Delta u \neq 0$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{故 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}}, \text{ 而 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

所以 $y'_x = \underline{\hspace{2cm}}$.

复合函数的求导法则:

一般地, 设函数 $u = g(x)$ 在点 x 处有导数 $u'_x = g'(x)$, 函数 $y = f(u)$ 在点 x 对应的点 u 处有导数 $y'_u = f'(u)$, 则复合函数 $y = f(g(x))$ 在点 x 处也有导数, 且 $y'_x = \underline{\hspace{2cm}}$ 或写成 $f'(g(x)) = \underline{\hspace{2cm}}$ 即 y 对 x 的导数等于_____

【引导思考3】: 请利用上面复合函数的求导法则求出函数 $y = (2x+3)^2$ 的导数, 并利用其他方法求此函数的导数并进行验证.

解:

【引导思考4】: 你现在能求函数 $y = \ln(2x-1)$ 的导数吗?

解:

【点评】: 求复合函数的导数时要注意:

(1) 关键是正确分析函数的复合层次, 善于把一部分表达式作为一个整体

(2) 最后一定要把中间变量换成自变量的函数

(3) 这个法则还可推广到三个或三个以上的函数相复合, 即若 $y = f(g(h(x)))$ 是由 $y = f(u)$, $u = g(v)$, $v = h(x)$ 复合而成, 则 $y_x' =$ _____.

【例一】 求下列函数的导数:

(1) $y = (3x+5)^3$; (2) $y = e^{-\sin x+1}$;

(3) $y = \sin(\pi x + \varphi)$; (4) $y = \frac{2}{\sqrt{3x+1}}$.

【例二】 求下列函数的导数:

(1) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (2) $y = \sin 2x \cdot \cos 3x$;

(3) $f(x) = \sin x \cdot \sqrt{1+\cos^2 x}$.

【例三】 (1) (海南卷) 曲线 $y = xe^x + 2x + 1$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_____

(2) (全国卷) 设曲线 $y = e^{ax}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与直线 $x + 2y + 1 = 0$ 垂直, 则 $a =$ _____.

(3) 已知 $f(x) = \sin 2x + \tan x + 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 处的切线方程为 ()

- A. $2x + y + 6 - \pi = 0$ B. $2x - y + 3 - \pi = 0$
C. $4x - 2y + 6 - \pi = 0$ D. $4x - 2y + 6 + \pi = 0$

【例四】 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - f'(2)x^2 + x - 3$, 则

$f'(2) =$ ()

- A. -1 B. 1 C. -5 D. 5

5.3 用导数研究函数的单调性

【学习目标】

1. 通过几何直观理解函数单调性和导数的关系, 掌握利用导数正负性判断原函数增减性的方法
2. 能熟练运用导函数的图像研究函数的单调性, 求函数的单调区间

【重点】利用导数判断一个函数在其定义区间内的单调性

【难点】含参数函数单调性的讨论与判断

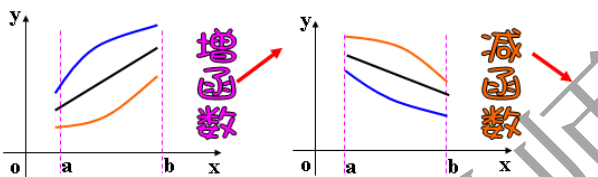
【复习引入】

1. 函数单调性的判定:

函数 $y = f(x)$ 在给定区间 D 上, 任取 $x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$ 时,

若恒有 _____, 则 $f(x)$ 在 D 上是增函数;

若恒有 _____, 则 $f(x)$ 在 D 上是减函数.



2. 单调区间的定义:

若 $f(x)$ 在 D 上是 _____, 则称 D 为 $f(x)$ 的单调增区间; 若 $f(x)$ 在 D 上是 _____, 则称 D 为 $f(x)$ 的单调减区间.

【问题情境】

利用前面的方法我们可以很快求出函数

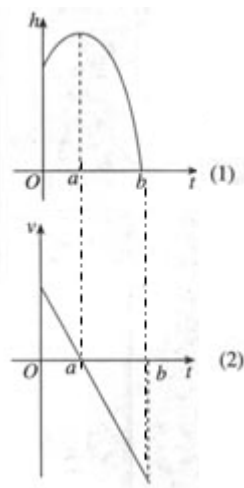
$y = x, y = x^2, y = x^3, y = \frac{1}{x}$ 等等的单调性, 但是较为

复杂一些的函数如: $y = x - \ln x, y = x^2 \cdot e^x$ 的单调性用定义法就较难判断, 因此除了用定义法判断函数的单调性, 是否可以寻找新的方法来判定一个函数的单调性. 而作为函数变化率的导数刻画了函数变化的趋势 (上升或下降的陡峭程度), 那么导数与函数的单调性有什么联系呢?

★问题 1: 右图 1 表示高台跳水运动员的高度 h 随时间 t 变化的函数

$h(t) = -5t^2 + 5t + 10$ 的图象,

图 2 表示高台跳水运动员的速度 v 随时间 t 变化的函数 $v(t) = h'(t) = -10t + 5$ 的图象, 问: 运动员从起跳到最高点, 以及从最高点到入水这两段时间的运动状态有什么区别?

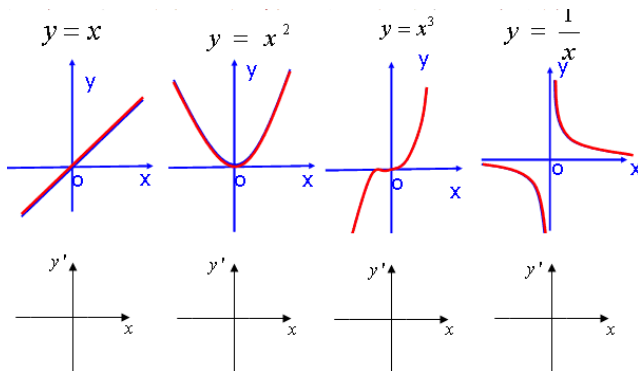


答: 运动员从起跳到最高点, h 随时间 t _____, 相应地, $v(t) = h'(t)$ _____ 0;

从最高点到入水, h 随时间 t _____, 相应地, $v(t) = h'(t)$ _____ 0.

【思考 1】: 这种情况是否具有一般性呢?

★问题 2: 作出下列四个函数的导函数的图象, 对比两个图像说说当原函数递增、递减时导函数有什么特点?

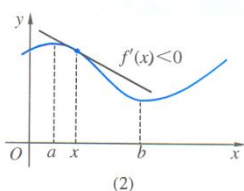
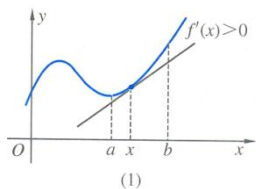


【思考 2】: 通过上述问题的观察, 你有什么发现?

答: 上述四个图象中, 增区间上对应的导数值 _____, 减区间上对应的导数值 _____.

即: 函数的单调性与导函数的 _____ 有关.

★问题 3: 如何利用导函数的正负判断函数的单调性?



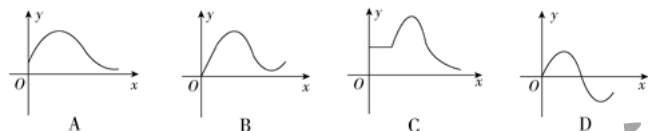
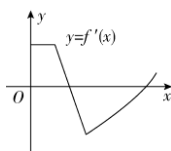
一般地，我们有下面的结论：

设函数 $y = f(x)$ ，如果在 x 的某个开区间内，总有_____，那么 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；

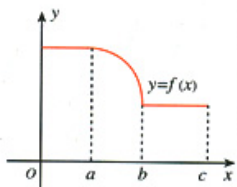
如果如果在 x 的某个开区间内，总有_____，那么 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。

如果在某区间上恒有 $f'(x) = 0$ ，那么 $f(x)$ 为该区间上的_____。

【练习1】：已知函数 $f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示，则函数 $y = f(x)$ 的图象是()



【练习2】：函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示，试画出导函数 $f'(x)$ 图象的大致形状。



★问题4：由 $f'(x) > 0$ ，我们可以得到 $f(x)$ 在某区间上单调递增；反之，如果函数 $f(x)$ 在某区间上单调递增，那么在该区间上必有 $f'(x) > 0$ 吗？为什么？

答：_____

【思考3】：某区间上 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) 是 $f(x)$ 在该区间上是增(减)函数的_____条件。

【例一】试确定下列函数在哪个区间内是增函数，哪个区间内是减函数：

(1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 24x + 1$;

(2) $f(x) = 3x^2 - 2\ln x$;

(3) $f(x) = \sin x - x, x \in (0, \pi)$;

(4) $f(x) = x^2 e^{-2x}$.

【点评】：(1)求可导函数 $f(x)$ 单调区间的步骤：

第1步：确定函数的定义域；

第2步：求出导数 $f'(x)$ 的零点；

第3步：用 $f'(x)$ 的零点将 $f(x)$ 的定义域划分为若干个区间，列表给出 $f'(x)$ 在各区间上的正负，由此得出函数 $y = f(x)$ 在定义域内的单调性。

(2) 函数图象的变化趋势与导数值大小的关系

一般地，设函数 $y = f(x)$ ，在区间 (a, b) 上：

导数的绝对值	函数值变化	函数的图象
越大	快	比较“陡峭”(向上或向下)
越小	慢	比较“平缓”(向上或向下)

【例二】已知函数 $f(x) = kx^3 + 3(k-1)x^2 - k^2 + 1 (k > 0)$ 的单调递减区间是 $(0, 4)$ 。

(1)实数 k 的值为_____；

(2)若在 $(0, 4)$ 上为减函数，则实数 k 的取值范围是_____。

【例三】(1) 若 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + b\ln(x+2)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是减函数，则 b 的取值范围是_____。

(2) 已知函数 $f(x) = \frac{1-x}{ax} + \ln x$ ，若函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数，求正实数 a 的取值范围。

5.4.1 函数的极值与导数

【学习目标】

1. 掌握极值的概念和求解方法, 理解导函数的零点与函数极值点之间的关系

2. 会根据导数判断函数的极大、极小值

【重点】函数极值点的判断方法和求解步骤

【难点】导函数的零点是函数极值点的必要不充分条件的理解

【问题情境】

高台跳水运动中, 运动员相对于水面的高度 h (单位: m) 与起跳后的时间 t (单位: s)

存在函数关系为

$$h(t) = -5t^2 + 5t + 10.$$

此函数是二次函数, 当 $t = \frac{1}{2}$ 时,

运动员距水面的高度最大.

问: (1) 函数 $h(t)$ 在此点处的导数值为多少?

(2) 此点附近区域内的图象有什么特点?

(3) 导数的符号有什么变化规律?

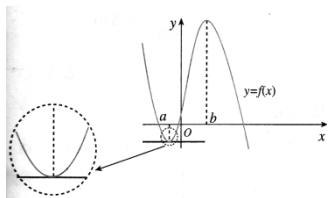
答: (1) _____

(2) _____

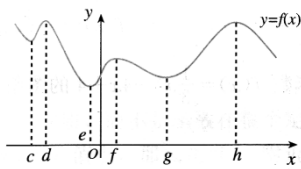
(3) _____

★问题 1: 对于一般的函数 $y = f(x)$, 是否也有同样的性质呢?

【探究一】极值的定义



(图 1)



(图 2)

【引导思考 1】如图 1, 函数 $y = f(x)$ 在 a 点的函数值与它附近区域内的点的函数值之间有什么关系? 在 a 点处的导数值为多少? 它附近区域导数的符号有什么

么变化规律?

答: _____

【引导思考 2】函数 $y = f(x)$ 在 b 点的函数值与它附近区域内的点的函数值之间有什么关系? 在 b 点处的导数值为多少? 它附近区域导数的符号有什么变化规律?

答: _____

【引导思考 3】如图 2, 图中 c 、 d 、 e 、 f 、 g 、 h 等点中哪些点与图 1 中 a 点有相同的特征?

_____ ; 哪些点又与图 1 中 b 点有相同的特征? _____.

【引导思考 4】图 1 中的 a 点的函数值 $f(a)$ 是函数 $y = f(x)$ 的最小值吗? 为什么?

图 1 中, 把 a 点叫做函数 $y = f(x)$ 的极小值点, $f(a)$ 叫做函数 $y = f(x)$ 的极小值; 同理, 把 b 点叫做函数的 _____, _____ 叫做函数的极大值.

注: 极小值点、极大值点统称为 _____, 极大值与极小值统称为 _____. (极值点是横坐标, 极值是纵坐标.)

★问题 2: 上述函数 $y = f(x)$ 在极值点处的导数值有什么特征?

答: _____

【引导思考 5】所有函数的极值点处的导数都是 0 吗?

答: _____

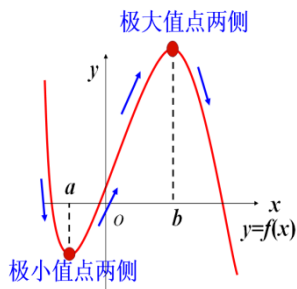
★问题 3: 导数值为 0 的点一定是函数的极值点吗? 为什么?

答: _____

对于可导函数, $f'(x_0) = 0$ 是 x_0 为极值点的 _____ 条件.

★问题4: 若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处取得极值, 如何知道 x_0 是极大值点还是极小值点?

【探究二】利用导数判别函数的极大(小)值点



x	$x < b$	b	$x > b$
$f'(x)$			
$f(x)$			

x	$x < a$	a	$x > a$
$f'(x)$			
$f(x)$			

【引导思考6】极大值点附近区域的左右两边图象有什么特征? 附近区域导数的符号有什么变化规律?

一般地, 当函数 $f(x)$ 在点 x_0 处光滑连续不断时, 判别 $f(x_0)$ 是极大(小)值的方法是:

解方程 $f'(x)=0$, 当 $f'(x_0)=0$ 时,

- (1) 如果在 x_0 附近的左侧 _____, 右侧 _____, 那么 $f(x_0)$ 是极大值;
- (2) 如果在 x_0 附近的左侧 _____, 右侧 _____, 那么, $f(x_0)$ 是极小值.

【范例解析】

【例一】求下列函数的极值.

(1) $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$; (2) $f(x)=1-(x-2)^{\frac{2}{3}}$.

【点评】求可导函数 $f(x)$ 的极值的步骤:

- 求定义域和导函数 $f'(x)$;
 - 求方程 $f'(x)=0$ 在函数 $f(x)$ 的定义域内的根;
 - 检查 $f'(x)$ 在方程根左右两侧值的符号,
 - 如果左正右负, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极大值;
 - 如果左负右正, 那么 $f(x)$ 在这个根处取得极小值.
- (即: 求导—求极点—列表—求极值)

【练习1】(多选题) 下列说法正确的是()

- A. 若 $f(x) \geq f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值, 若 $f(x) \leq f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值

B. 若 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值, $f(a)$ 是函数的最大值, 则 $f(x_0)=f(a)$

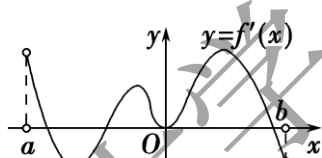
C. 可导函数极值点的导数值为 0, 但导数值为 0 的点可能不是函数的极值点

D. 极值点一定出现在定义区间的内部

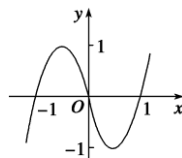
E. 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有极值, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一定不是单调函数

【例二】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为开区间 (a, b) , 导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 内的图象如下左图所示, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内的极小值点共有()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



(例二(1)图)



(例二(2)图)

(2) 已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如上右图所示, (其中 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数), 给出以下说法:

- 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是增函数;
 - 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上单调递增;
 - 函数 $f(x)$ 在 $x=-\frac{1}{2}$ 处取得极大值;
 - 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值.
- 其中正确的说法是_____.

(3) 设 $a \in \mathbf{R}$, 若函数 $y=x+a \ln x$ 在区间 $(\frac{1}{e}, e)$ 上有极值点, 则 a 的取值范围为_____.

(4) 若函数 $f(x)=x^3-6bx+3b$ 在 $(0, 1)$ 内有极小值, 则实数 b 的取值范围是_____.

(5) 已知函数 $f(x)=\cos x+a \ln x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处取得极值, 则 a =_____.

(6) 已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点, 则实数 a 的取值范围是_____.

5.4.2 函数的最大(小)值与导数

【学习目标】

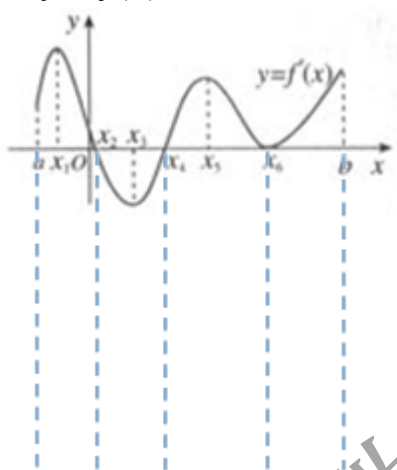
1. 理解函数极值与最值之间的关系, 掌握利用导数求函数最值的方法
2. 经历利用导数研究函数的最值得具体过程, 理解闭区间上函数最值由极值和端点值中产生

【重点】利用导数求函数的最值

【难点】准确求函数的最值, 含参数最值问题的讨论

【复习引入】

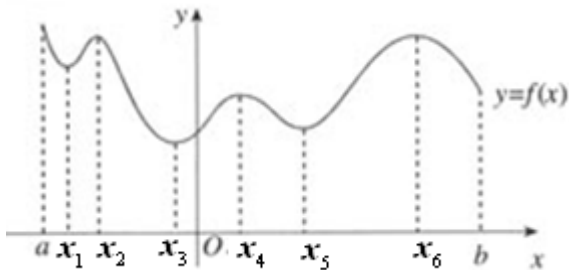
右图是导函数 $y = f'(x)$ 的图象, 函数 $y = f(x)$ 的极大值点为_____, 极小值点为_____, 并在它下面画出函数 $y = f(x)$ 的大致图象.



- (思考): 1、极大值一定大于极小值吗?
2、导数值为 0 的点一定是函数的极值点吗?

★问题 1: 我们知道, 极值反映的是函数在某一点附近的局部性质, 而不是函数在整个定义域内的性质. 而往往我们需要更关心函数在某个区间上的最大、最小情况, 那么函数的极值与最值之间有什么样的关系呢?

【引导思考 1】: 找出下图中函数 $y = f(x)$ 的极小值, 并找出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值, 通过对比, 你有什么发现?



答: 在上图所表示的函数 $y = f(x)$ 中, 极小值有_____, 最小值为_____, 我们发现_____.

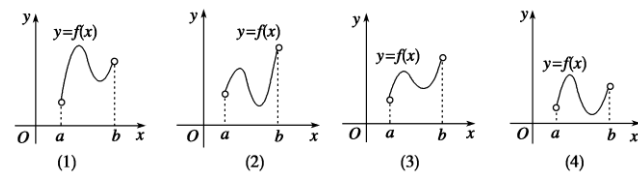
【引导思考 2】: 找出上图中函数 $y = f(x)$ 的极大值, 并找出函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值, 通过对比, 你有什么发现?

答: 在上图所表示的函数 $y = f(x)$ 中, 极大值有_____, 最大值为_____, 我们发现_____.

一般地, 如果在区间 $[a, b]$ 上函数 $y = f(x)$ 的图象是一条连续不断的曲线, 那么它必有最大值和最小值. 而且函数的最值一定在_____与_____中产生.

【注释】: (1) 给定函数的区间必须是闭区间, $f(x)$ 在开区间上虽然连续但不能保证有最大值和最小值.

常见的有以下几种情况: 如图(1)中的函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上有最大值而无最小值; 如图(2)中的函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上有最小值而无最大值; 如图(3)中的函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上既无最大值又无最小值; 如图(4)中的函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 上既有最大值又有最小值.



(2) 函数 $f(x)$ 的图象在区间 $[a, b]$ 上连续不断是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在最大值和最小值的充分不必要条件. 如函数 $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0, \\ -1, & x = 0 \end{cases}$ 的图象在 $[-1, 1]$ 上有间断点, 但存在最大值和最小值.

【例一】(1) 求函数 $f(x) = x^3 - 3x$, $x \in [-\sqrt{3}, 3]$ 的最大值与最小值;

(2) 求函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$

上的值域.

【例二】已知函数 $g(x) = e^x - 2ax - b$, 求 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值.

【点评】: 一般地, 求函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值的步骤如下:

(1) 求函数 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内的_____;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的各个极值与函数

_____ 进行比较, 其中最大的一个是最大值, 最小的一个是最小值.

【例三】 (1) 若 $F(x) = x - 2\ln x + 2a$, 则 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值是_____.

(2) 已知 $f(x) = -x^2 + mx + 1$ 在区间 $[-2, -1]$ 上的最大值就是函数 $f(x)$ 的极大值, 则 m 的取值范围是_____.

(3) 已知函数 $f(x) = 2\ln x + \frac{a}{x^2} (a > 0)$. 若当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 2$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

【例四】设函数 $f(x) = -x^3 + 3bx$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$, 则 b 的值是()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{4}}{2}$

【例五】已知函数 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x}$.

(1) 当 $a < 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上的最小值是 $\frac{3}{2}$, 求 a 的值.

【例六】设函数 $f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + m (a > 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $x \in [-1, 1]$ 内没有极值点, 求 a 的取值范围;

(3) 若对任意的 $a \in [3, 6]$, 不等式 $f(x) \leq 1$ 在 $x \in [-2, 2]$ 上恒成立, 求 m 的取值范围.

5.5 导数在研究函数中的应用习题课

★知识回顾

1、 设 $f(x)$ 在区间 D 上可导, 则

$f(x)$ 在 D 上递增 $\Leftrightarrow f'(x)$ _____;

$f(x)$ 在 D 上递减 $\Leftrightarrow f'(x)$ _____.

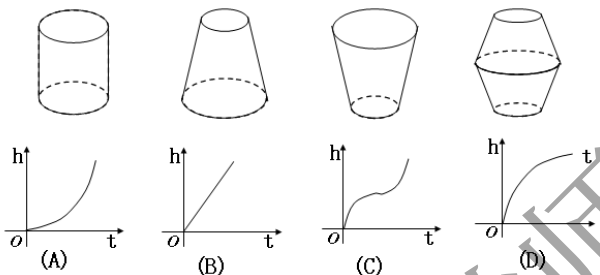
2、 利用导数证明不等式 $f(x) > g(x), x \in (a, b)$,

①构造函数 $F(x) = f(x) - g(x)$;

②求 $F'(x) = f'(x) - g'(x)$, 说明 $F'(x)$ 在 (a, b) 上单调, $\therefore F(x) > F(a)$;

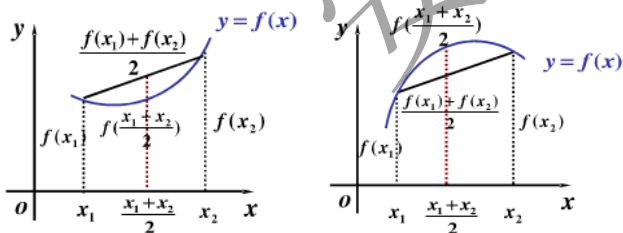
③判断 $F(a) \geq 0$, 得证.

【例一】如图, 水以常速(即单位时间内注入水的体积相同)注入下面四种底面积相同的容器中, 请分别找出与容器对应的水的高度 h 与时间 t 的函数关系图象.



【探究】函数的凸凹性

定义: 设函数 $f(x)$ 在区间 D 上连续不断,



图形上任意弧段位于所张弦的下方

图形上任意弧段位于所张弦的上方

(1) 如上左图, 如果对 D 上任意两点 x_1, x_2 恒有:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 D 上是凹函数.

(2) 如上右图, 如果对 D 上任意两点 x_1, x_2 恒有:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

那么称 $f(x)$ 在 D 上是凸函数.

【引导思考1】函数的凹凸性和函数的导数之间有什么关系?

答: 凹函数的导函数在 D 上是 _____;

凸函数的导函数在 D 上是 _____.

【引导思考2】还可以通过其他方法来判断函数的凹凸性吗?

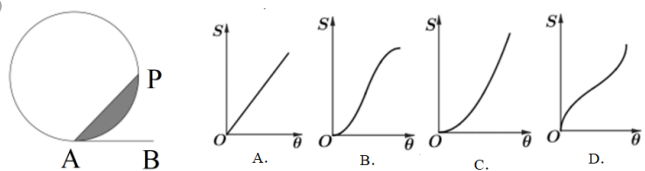
设函数 $f(x)$ 在区间 D 上连续不断, 且都可导, 则:

(1) 若 _____, 则 $f(x)$ 在 D 上是凹函数.

(2) 若 _____, 则 $f(x)$ 在 D 上是凸函数.

【练习1】(2023秋 福建三明 高二统考期末) 如图, AB 是圆的切线, P 是圆上的动点, 设

$\angle PAB = \theta (0 < \theta < \pi)$, AP 扫过的圆内阴影部分的面积 S 是 θ 的函数. 这个函数的图象可能是 ()



【练习2】(湖北卷) 在 $y = 2^x$, $y = \log_2 x$, $y = x^2$, $y = \cos 2x$ 这四个函数中, 当 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 时,

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 恒成立的函数的个数是 ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【例二】(2022秋 云南曲靖 高二校联考阶段练习) 对于三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 给出定义: 设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数, 若方程 $f''(x) = 0$ 有实数解 x_0 , 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”. 经过探究发现: 任何一个三次函数都有“拐点”; 任何一个三次函数都有对称中心,

且“拐点”就是对称中心.设函数

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{12}, \text{ 则 } f(x) \text{ 的拐点为}$$

_____.

$$f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + f\left(\frac{3}{2023}\right) + \cdots + f\left(\frac{2022}{2023}\right) = \text{_____}$$

_____.

【例三】(多选题) (2022 秋 广东 高三统考阶段练习)

已知函数 $f(x) = \frac{(\ln x)^2 + k}{x}$ (k 为常数), 其导数为

$f'(x)$, 且 $f(1) = 1$, 设 $g(x) = xf(x)$, 则下列说法正

确的是 ()

A. $f(x) > 0$ B. $f'(x) < 0$

C. 任意 $x_1, x_2 \in (e^2, +\infty)$, 都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

D. 若曲线 $y = g(x)$ 上存在不同两点 A, B , 且在点 A ,

B 处的切线斜率均为 k , 则实数 k 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

【例四】(1) 已知函数 $y = ax^3 + bx^2 + 6x - 1$ 的单调递增区间为 $[-2, 3]$, 求 a, b 的值.

(2) 若函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + (a-1)x + 1$ 在区间 $(1, 4)$ 上单调递减, 在 $(6, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

(3) 已知函数 $f(x) = x^2 + 2x + a \ln x$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1]$ 上恒为单调函数, 求实数 a 的取值范围.

【例五】设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 曲线 $y = f(x)$ 通过点 $(0, 2a+3)$, 且在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线垂直于 y 轴.

(1) 用 a 分别表示 b 和 c ;

(2) 当 bc 取得最小值时, 求函数 $g(x) = -f(x) \cdot e^{-x}$ 的单调区间.

选择性必修3 第六章、计数原理

6.1 分类计数原理与分步计数原理

【学习目标】

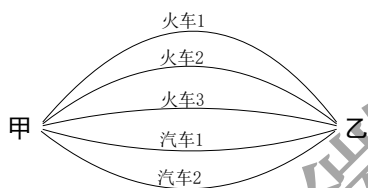
1. 掌握计数的两个基本原理,并能正确的用它们分析和解决一些简单的问题
2. 通过计数基本原理的理解和运用,提高分析问题和解决问题的能力,在面对现实生活中复杂的事物和现象,能够作出正确的分析,准确的判断,进而拿出完善的处理方案

【重点】理解分类加法计数原理与分步乘法计数原理

【难点】对具体问题进行准确合理的“分类”或“分步”

【问题引入】

★问题 1: 从甲地到乙地,可以乘坐火车,也可以乘坐汽车.一天中,火车有 3 班,汽车有 2 班,那么一天中,乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法? 答: _____



【思考 1】: 完成一件事有两类不同方案,在第 1 类方案中有 m 种不同的方法,在第 2 类方案中有 n 种不同的方法.那么完成这件事共有 _____ 种不同的方法.

【思考 2】: 如果从甲地到乙地还可以坐轮船,每天有 4 班,则一共有多少种不同的走法?

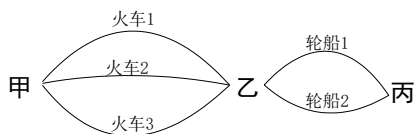
分类计数原理(加法原理): 完成一件事,有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法, ..., 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有

$$N =$$

种不同的方法.

★问题二: 某人先乘坐火车从甲地到乙地,然后再从乙地坐轮船到丙地,已知一天中火车有 3 班,轮船有 2 班,那么他从甲地到丙地共有多少种不同的走法?

答: _____



【思考 3】: 完成一件事需要分两步来完成,完成第 1 步有 m 种不同的方法,完成第 2 步有 n 种不同的方法.那么完成这件事共有 _____ 种不同的方法.

分步计数原理(乘法原理): 完成一件事,需要分成 n 个步骤,做第 1 步有 m_1 种不同的方法,做第 2 步有 m_2 种不同的方法, ..., 做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有

$$N =$$

种不同的方法.

【思考 4】: 如果问题 2 中从甲地到丙地还可以直接坐飞机,且一天中飞机有 2 班,则从甲地到丙地一共有多少种走法?

【思考 5】: 说说分类计数原理与分步计数原理的区别与联系?

联系 分类计数原理与分步计数原理都是涉及完成一件事的不同方法的种数的问题.

区别 分类计数原理与“分类”有关,各种方法相互独立,用其中任何一种方法都可以完成这件事;分步计数原理与“分步”有关,各个步骤相互依存,只有各个步骤都完成了,这件事才算完成.

【例题解析】

【例一】 (1) 两个袋子里分别装有 40 个红球, 60 个白球,从中任取一个球,有多少种取法?

(2) 两个袋子里分别装有 40 个红球与 60 个白球, 从中取一个白球和一个红球, 有多少种取法?

【借题发挥 1】某班级有男三好学生 5 人, 女三好学生 4 人.

- (1) 从中任选一人去领奖, 有多少种不同的选法?
- (2) 从中任选男、女三好学生各一人去参加座谈会, 有多少种不同的选法?

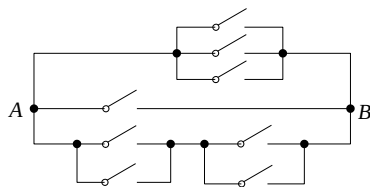
【例二】书架的第一层放有 4 本不同的计算机书, 第二层放有 3 本不同的文艺书, 第三层放有 2 本不同的体育书.

- (1) 从书架上任取 1 本书, 有多少种不同取法?
- (2) 从书架的第一、二、三层各取一本书, 有多少种不同的取法?
- (3) 从书架上先任取一本书, 然后再在剩下的书中又任取一本, 共有多少种不同的取法?
- (4) 从书架上先任取一本书, 然后再在剩下的文艺书中任取一本, 共有多少种取法?

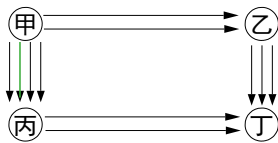
【点评】: 较复杂的问题往往不是单纯的“分类”“分步”可以解决的, 而要将“分类”“分步”结合起来运用. 一般是先“分类”, 然后再在每一类中“分步”, 分类要做到“不重不漏”, 分步要做到“步骤完整”.

【借题发挥 2】10 名学生, 其中女生 3 人, 先从中选两名代表, 至少要有一名女生, 问共有多少种选法?

【例三】如图, 一条电路从 A 处到 B 处接通时, 可以有多少条不同的线路?



【借题发挥 3】如图, 从甲地到乙地有 2 条路, 从乙地到丁地有 3 条路, 从甲地到丙地有 4 条路, 从丙地到丁地有 2 条路, 问从甲地到丁地共有多少种不同的走法?



【例四】一个号码锁有 4 个拨号键, 每个拨号盘键上有从 0 到 9 共 10 个数字, 这 4 个拨号盘可以组成多少个四位数字号码?

【借题发挥 4】乘积

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$$

展开后共有多少项?

6.2.1 排列 (一)

【学习目标】

1. 理解排列原理、知道排列数的运算方法, 掌握排列数公式的推导
2. 识别排列问题, 会用排列数公式求解排列问题的种数

【重点】 排列原理和排列数的概念

【难点】 排列数公式的推导

【问题引入】

★问题 1: 从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名参加某天的一项活动, 其中 1 人参加上午的活动, 另一人参加下午的活动, 有多少种不同的选法?

★问题 2: 从 a, b, c, d 这 4 个字母中, 每次取出 3 个按顺序排成一列, 共有多少种排法?

★问题 3: 七名同学站成一排照相, 有多少种不同的排法?

注: 我们把上面问题中被取的对象叫做元素。

【思考 1】: 上述问题 1、2、3 的共同特点是什么? 你能将它们推广到一般情形吗?

【排序原理】 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素, 按照一定的顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 从 n 个不同元素中取出 m 个元素的所有排列的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数, 用符号 A_n^m 表示.

解读: (1) n 个元素是不同的, 取出的 m 个元素也是不同的 (m, n 是正整数, 且 $m \leq n$);

(2) 两个基本内容: 一是“取出元素”, 二是“按照一定顺序排列”;

(3) 两个排列相同, 当且仅当两个排列的元素完全相同, 且元素的排列顺序也完全相同.

【思考 2】: a, c, b 与 a, b, c 是同一个排列吗? 答: _____

由上可知: $A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

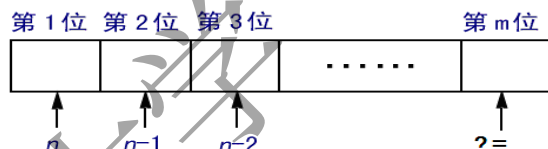
$$A_4^3 = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

★问题 4: 你能得到 A_n^2 和 A_n^3 的结果是什么吗? 你能很好的解释这两个结果吗?

$$A_n^2 =$$

$$A_n^3 =$$

【思考 3】: 由上面几个式子你能看出什么规律吗?



$$\therefore A_n^m =$$

$$\text{特别地, } A_n^n = =$$

(其中 $n!$ 读作 n 的阶乘, 即 $A_n^n = n!$, 并规定 $0! = 1$)

【思考 4】: ① 若 $A_n^m = 17 \times 16 \times 15 \times \cdots \times 5$, 则

$$m = _, \quad n = _$$

$$\text{② } A_{n+1}^{m+1} = (n+1) \cdot A_n^m \text{ 成立吗?}$$

【思考 5】: “从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名参加一项活动, 共有几种选法” 这是一个排列问题吗? 为什么?

【例题解析】

【例一】 计算

$$\text{① } A_6^3 \quad \text{② } A_6^3 \quad \text{③ } A_6^6 \quad \text{④ } A_3^3$$

〔点评〕: 由上题结果可知:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{且规定 } 0! = 1. \quad (\text{〔思考 6〕: 为什么})$$

排列数的另一个计算公式:

$$\begin{aligned} A_n^m &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(n-m)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-m)(n-m-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!} \quad \text{即} \quad A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \end{aligned}$$

〔借题发挥 1〕 计算:

$$(1) A_{15}^4 \quad (2) A_8^4 - 2A_8^2 \quad (3) \frac{A_{12}^8}{A_{12}^7}$$

【例二】 ①有 5 本不同的书, 从中选 3 本分别送给 3 个同学, 每人各一本, 共有多少种不同的送法?

②有 5 种不同的书, 要买三本送给 3 名同学, 每人各 1 本, 共有多少种不同的送法?

〔借题发挥 2〕 某段铁路上有 12 个车站, 共需要准备多少种普通客票?

【例三】 某信号兵用红、黄、蓝 3 面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号, 每次可以挂 1 面、2 面或 3 面, 并且不同的顺序表示不同的信号, 一共可以表示多少种不同的信号?

〔借题发挥 3〕 用 0 到 9 这 10 个数字, 可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解法一:

解法二:

解法三:

【例四】 解方程: $A_{2x}^3 = 100A_x^2$

〔借题发挥 4-1〕 解方程: $3A_x^3 = 2A_{x+1}^2 + 6A_x^2$.

〔借题发挥 4-2〕 解不等式: $A_9^x > 6A_9^{x-2}$.

【例五】 求证: $A_n^n = A_n^m \cdot A_{n-m}^{n-m}$;

〔借题发挥 5〕 证明: $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$.

【例六】 6 人站成一排, 其中甲不站排头, 也不站排尾, 共有多少种排法?

〔借题发挥 6〕

①7 个人站成一排, 如果甲必须站在正中间, 有多少种排法?

②7 个人站成一排, 如果甲、乙两人必须站在两端, 有多少种排法?

③7 个小孩站成两排, 其中 3 个女孩站在第一排, 4 个男孩站在后排, 有多少种排法?

④7 个人站成两排, 其中前排站 3 人, 后排站 4 人, 有多少种排法?

6.2.2 排列(二)

【学习目标】

1. 理解和掌握限制条件的排列问题的三种基本方法：优先安排法、捆绑法和插空法
2. 会将实际的问题转化为相应的排列模型并用相应的方法进行求解，对于复杂问题能准确先进行分类

【重点】 探讨有限制条件的排列问题的解题思路

【难点】 优先定元素与定位置分析的方法

◆元素相邻问题——捆绑法

【例一】 6 名同学排成一排，其中甲、乙两人必须在一起的不同的排法共有 () 种.

- A.720 B.360 C.240 D.120

【借题发挥 1】 5 名男生与 2 名女生排成一排照相，两女生恰好相邻的排法有多少种？

◆元素相离(不相邻)问题——插空法

【例二】 要排一张有 6 个歌唱节目和 4 个舞蹈节目的演出节目单，任何两个舞蹈节目不得相邻，问有多少种不同的排法？

【借题发挥 2】 4 名男生和 4 名女生站成一排

- (1) 男生不相邻的站法有多少种？
- (2) 女生不相邻的站法有多少种？
- (3) 男、女生相间的站法有多少种？(可不计算出数值)

◆特殊元素问题——优先安排法

【例三】 计划展出 10 幅不同的画，其中 1 幅水彩画、4 幅油画、5 幅国画，排成一行陈列，要求同一品种的画必须连在一起，并且水彩画不放在两端，那么不同的陈列方式有 () 种

- A. $A_4^4 A_5^5$ B. $A_3^3 A_4^4 A_5^5$
C. $A_3^1 A_4^4 A_5^5$ D. $A_2^2 A_4^4 A_5^5$

【借题发挥 3】 7 名学生站成一排，求下列情形下各有多少不同排法：

- (1) 甲不站排头；
- (2) 甲不站排头、乙不站排尾；
- (3) 甲、乙不相邻且不在两头；
- (4) 甲、乙之间隔一人.

◆数字问题——如何分类

【例四】用 0、1、2、3、4、5 这六个数字：

(1) 能组成多少个无重复数字的四位偶数？

〔借题发挥 4〕用数字 0、1、2、3、4、5 可以组成没有重复数字，并且比 20000 大的五位偶数共有 ()

A.288 个 B.240 个 C.144 个 D.126 个

(2) 能组成多少个无重复数字且为 5 的倍数的四位数？

(3) 能组成多少个比 1325 大的四位数？

6.2.3 组合 (一)

问题 1: 从甲、乙、丙 3 名同学中选出 2 名参加一项活动, 有多少种不同的选法?

思考: 甲、乙与乙、甲是同一种选法吗? 这与排列问题有什么不同?

提示: 类比集合的无序性

问题 2: 从 $abcd$ 四个元素中选出 3 个元素组成一个集合, 共有多少种不同的选法?

组合: 一般地, 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素并组成一组, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合, 从 n 个不同元素中取出 $m(m \leq n)$ 个元素的所有组合的个数, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数, 用符号 C_n^m 表示.

思考: 排列与组合的区别?

在 4 个不同元素 $abcd$ 中取出 2 个, 共有多少种不同的组合?

注: 在上题中, a, b 与 b, a 是两个不同的排列, 但他们却是同一个组合

由上面可知: $C_3^2 = 3, C_4^2 = 6$, 那么 $C_4^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

对于问题 2, 由分步计数原理可得: $A_4^3 = C_4^3 \cdot A_3^3$, 因此 $C_4^3 = \underline{\hspace{2cm}}$

由此推广可得: $A_n^m = C_n^m \cdot A_m^m$,

即 $C_n^m = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

这里 $n, m \in N^*$, 且 $m \leq n$, 这个公式叫做组合数公式

又 $\because A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$, $\therefore C_n^m = \underline{\hspace{2cm}}$

【例题解析】

例 1、计算: ① C_7^2 ② $C_{10}^7 - C_{10}^3$

例 2、求证① $C_n^m = \frac{m+1}{n-m} \cdot C_n^{m+1}$

$$\textcircled{2} C_n^m = \frac{m+1}{n+1} \cdot C_{n+1}^{m+1}$$

例 3、写出:

① 从 5 个元素 a, b, c, d, e 中任取 2 个元素的所有组合

② 从 5 个元素 a, b, c, d, e 中任取 3 个元素的所有组合

③ 从 5 个元素 a, b, c, d, e 中任取 3 个元素的所有排列.

例 4、已知平面内有 10 个点, 且任何三个点都不在一条直线上, 写出由其中每 3 个点为顶点的所有三角形的个数

【组合数的两个基本性质】

性质 1 $C_n^m = C_n^{n-m}$, 特别地, $C_n^n = C_n^0 = 1$

性质 2 $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$

思考: 你能给出性质 2 的证明过程吗?

例 5、①平面内有 10 个点, 以其中每 2 个点为端点的线段共有多少条?

②平面内有 10 个点, 以其中每 2 个点为端点的有向线段共有多少条?

例 6、一个口袋内装有大小相同的 7 个白球和 1 个黑球.

① 从口袋内取出 3 个球, 共有多少种取法?

② 从口袋内取出 3 个球, 使其中含有 1 个黑球, 有多少种取法?

③ 从口袋内取出 3 个球, 使其中不含黑球, 有多少种取法?

思考: 怎样利用例 6 的结果来解释上面的性质?

例 7、在 100 件产品中, 有 98 件合格品, 2 件次品, 从这 100 件产品中任意抽出 3 件.

① 一共有多少种不同的抽法?

② 抽出的 3 件中恰有 1 件是次品的抽法有多少种?

③ 抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法有多少种?

6.2.4 组合 (二)

★排列与组合的应用 (常用方法总结)

思考: 什么是两个相同的排列?

什么是两个相同的组合?

例 1、从 1, 3, 9, 27, 81 中, 任取两个数相加, 可得多少个不同的和? 任取两个数相减, 可得多少个不同的差?

练习 1: ① 一个学习小组共 10 人, 约定在假期每两人要通一封信, 共需通多少封信? 每两人挂一次电话, 共需挂多少次电话?

② 四名同学分配到三个车间去劳动有几种分配方法?
四名同学争取三项竞赛冠军, 获得冠军有几种可能?

思考: 如何判定一个问题是排列问题还是组合问题?
如何分类或分步?

【方法一: 总的原则----合理分类和准确分步】

例 2、6 个同学和 2 个老师排成一排照相, 2 个老师站中间, 学生甲不站排头, 学生乙不站排尾, 共有多少种不同的排法?

练习 2: ① 0, 1, 2, 3, 4, 5 可组成多少个无重复数字的五位偶数?

② 0, 1, 2, 3, 4, 5 可组成多少个无重复数字且能被 5 整除的五位数?

③ 0, 1, 2, 3, 4, 5 可组成多少个无重复数字且大于 31250 的五位数?

【方法二: 特殊元素用“优先安排法”】

例 3、用 0, 1, 2, 3, 4 这五个数, 组成没有重复数字的三位数, 其中偶数共有_____种.

练习 3: 0, 1, 3, 5, 9 可组成多少个无重复数字的五位奇数?

【方法三: 总体淘汰法】

例 4、用 0, 1, 2, 3, 4 这五个数字, 组成没有重复数字的三位数, 其中 1 不在个位的数共有多少种?

练习 4: ① 三个男生, 四个女生排成一排, 甲不在最左, 乙不在最右, 有几种不同方法?

② 五人从左到右站成一排, 其中甲不站排头, 乙不站第二个位置, 那么不同的站法有_____种?

③ 用“排除法”解例 2

【方法四：相邻问题-----捆绑法】

例 5、7 人站在一排照相，要求甲、乙、丙三人相邻，共有多少种站法？

练习 5：① 某人射击 8 枪，命中 4 枪，那么命中的 4 枪中恰有 3 枪是连中的情形有几种？

② 7 名同学排成一排， A, B, C 三人必须相邻，且 D 不站在排头和排尾，共有多少种不同的排法？

【方法五：不相邻问题——插空法】

例 6、7 人站成一排照相，要求甲、乙、丙三人不相邻，共有多少种站法？

练习 6：① 三个男生，四个女生排成一排，男生之间，女生之间不相邻，有多少种不同排法？

② 如果有两个男生，四个女生排成一排，要求男生之间不相邻，有多少种不同排法？

【方法六：对称问题——对等法】

例 7、其中安排考试科目 9 门，语文要在数学之前考，有多少种不同的安排顺序？

练习 7：① A, B, C, D, E 五人站成一排，如果 B 必须站在 A 的右边，那么不同的站法有多少种？

② 有 4 名男生，3 名女生，3 名女生高矮互不等，将 7 名学生排成一行，要求从左到右，女生从矮到高排列，有多少种排法？

【方法七：分排问题——直排法】

例 8、7 人坐两排座位，第一排坐三人，第二排坐 4 人，则有多少种不同的坐法？

练习 8：① 7 个学生排成两排，其中 2 个女生排第一排，5 个男生站在第二排，共有多少种排法？

② 八个人排成两排，有几种不同排法？

6.3.1 二项式定理

【学习目标】

1. 理解并掌握二项式定理, 从项数、指数、系数、通项几个特征熟记它的展开式
2. 会运用展开式的通项公式求展开式的特定项, 并区分项的系数与二项式系数

【重点】二项式定理的推导及通项公式的记忆与使用

【难点】如何利用计数原理推导出二项展开式

【问题引入】

☆引入问题 1: 若今天是星期二, 再过 30 天后是星期几? 怎么算?

答: _____

☆引入问题 2: 若今天是星期二, 再过 $8^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 天后是星期几? 怎么算?

【引导思考】: 寻找 8^n 与 7 之间的关系.

★问题 1: 填空, 并观察式子的右边有怎样的特点?

$$(a+b)^1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a+b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a+b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(a+b)^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

【思考 1】: 上面的四个式子右边上下行的系数之间有什么规律, 并利用此规律填空:

$$(a+b)^5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

.....

由上面分析, 从而猜想出 $(a+b)^n$ 展开式的特点:

初步归纳出下式:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

【练习 1】:

$$(a+b)^7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

★问题 2: 那么该如何展开 $(a+b)^{100}$ 呢? 又如何展开

$(a+b)^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 呢?

【探究一】: 以 $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ 的展开为例, 系数有什么规律?

【探究二】: 观察 $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$ 的展开, a^2b 前的系数是怎样得来的? ab^2 呢?

【探究三】: 根据前面的观察, 你能否用所学的排列组合的知识展开 $(a+b)^4$, 并归纳出 $(a+b)^n$ 的展开式.

$$\begin{aligned} \text{答: } (a+b)^4 &= (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) \\ &= (\quad)a^4 + (\quad)a^3b + (\quad)a^2b^2 + (\quad)ab^3 + (\quad)b^4 \end{aligned}$$

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)}_{n \text{ 个 } (a+b)}$$

=

二项式定理:

对于任意的正整数 n , 都可以得到如下展开式:

$$(a+b)^n =$$

注: (二项式展开式的特点)

1. 它有 $n+1$ 项, 各项的系数 C_n^k 叫做二项式系数;
2. 各项的次数 (即 a 与 b 的指数的和) 都等于二项式的次数 n ;
3. 字母 a 按降幂排列, 次数由 n 递减到 0, 字母 b 按升幂排列, 次数由 0 递增到 n ;
4. $C_n^k a^{n-k} b^k$ 叫做二项展开式的通项, 是二项展开式中的第 _____ 项, 不是第 k 项, 因此记做:

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k;$$

5. 展开式中系数 C_n^k ($k=1, 2, 3, \dots, n$) 叫做第 $k+1$ 项的二项式系数, 它们仅与二项式次数 n 有关.

★问题 3: 特别地, 对二项式定理中, 取 $a=1, b=x$, 则展开式变成怎样的形式?

答: $(1+x)^n =$ _____

【思考 2】: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n =$ _____.

【思考 3】: 你能利用刚才所学的二项式定理解决前面的引入问题 2 吗?

答: $8^n =$ _____

★问题 4: 你能写出 $(a-b)^n$ 的展开式吗?

答: $(a-b)^n =$ _____

【思考 4】: $(2x+3y)^{20}$ 的二项展开式的通项是什么?

答:

【例一】 写出下列式子的展开式:

$$\textcircled{1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4;$$

$$\textcircled{2} \left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6.$$

【例二】 求 $(1+2x)^7$ 的展开式中第 4 项的二项式系数和第 4 项的系数分别是什么?

【思考】: 项的系数和二项式系数有什么不同? 在什么情况下它们会相等?

【例三】 (1) 求 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^9$ 的展开式中含 x^3 项的系数.

(2) 写出 $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式的第 r 项.

【例四】求 $(1-2x)^5(1+3x)^4$ 的展开式中按 x 的升幂排列的第 3 项;

6.3.2 神奇的杨辉三角

【学习目标】

1. 了解杨辉及杨辉三角;巩固组合数性质,了解我国古代的数学成就

2. 初步认识杨辉三角中行列数字的特点与规律

【重点】从杨辉三角的行列数字中发现规律,得出结论

【难点】体会用函数知识研究问题的方法,理解二项式系数的性质

【复习引入】

$$(a+b)^n = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(1+x)^n = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【史料引入】

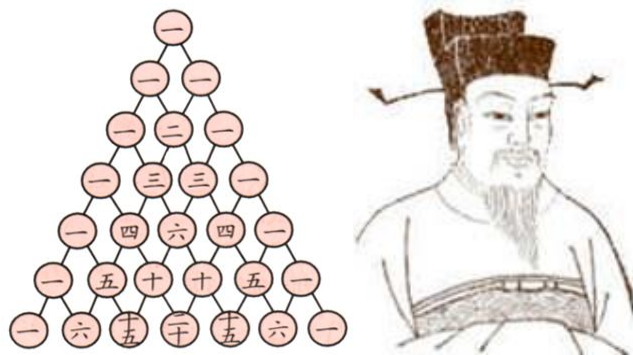
二项式 $(a+b)^n$ 展开式的二项式系数,当 n 依次取 1, 2, 3... 时,列出的一张表,叫做二项式系数表,因为它形如三角形,南宋的杨辉对其有过深入研究,所以我们又称它为杨辉三角。

$$\begin{array}{l}
 (a+b)^0 \rightarrow 1 \\
 (a+b)^1 \rightarrow 1 \quad 1 \\
 (a+b)^2 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 1 \\
 (a+b)^3 \rightarrow 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
 (a+b)^4 \rightarrow 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
 (a+b)^5 \rightarrow 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
 (a+b)^6 \rightarrow 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
 (a+b)^7 \rightarrow 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
 \dots \dots \dots \\
 1 \quad C_{n-1}^1 \quad C_{n-1}^2 \quad \dots \quad C_{n-1}^{k-1} \quad C_{n-1}^k \quad \dots \quad C_{n-1}^{n-2} \quad 1 \\
 \dots \dots \dots
 \end{array}$$

杨辉,杭州钱塘人。中国南宋末年数学家,数学教育家。著作甚多,他编著的数学书共五种二十一卷,著有《详解九章算法》十二卷(1261年)、《日用算法》二卷、《乘除通变本末》三卷、《田亩比类乘除算法》二卷、《续古摘奇算法》二卷。其中后三种合称《杨辉算法》,朝鲜、日本等国均有译本出版,流传世界。

“杨辉三角”出现在杨辉编著的《详解九章算法》一书中,此书还说明表内除“一”以外的每一个数都等于它肩上两个数的和。杨辉指出这个方法出于《释

锁》算书,且我国北宋数学家贾宪(约公元11世纪)已经用过它,这表明我国发现这个表不晚于11世纪。



在欧洲,这个表被认为是法国数学家物理学家帕斯卡首先发现的(Blaise Pascal, 1623年~1662年),他们把这个表叫做帕斯卡三角。这就是说,杨辉三角的发现要比欧洲早500年左右,由此可见我国古代数学的成就是非常值得中华民族自豪的。

杨辉,与秦九韶、李冶、朱世杰并称宋元四大数学家,他在我国古代数学史和数学教育史上占有十分重要的地位。同时,杨辉被誉为“中国幻方第一人”。

杨辉对幻方的研究源于一个小故事。当时杨辉是台州的地方官,一次外出巡游,碰到一孩童挡道,杨辉问明原因方知是一孩童在地上做一道数学算题,杨辉一听来了兴趣,下轿来到孩童旁问是什么算题。原来,这个孩童在算一位老先生出的一道趣题:把1到9的数字分行排列,不论竖着加、横着加,还是斜着加,结果都等于15。

杨辉看到这个算题,时想起来他在西汉学者戴德编纂的《大戴礼》一书中也见过。杨辉想到这儿,和孩童一起算了起来,直到午后,两人终于将算式摆出来了。

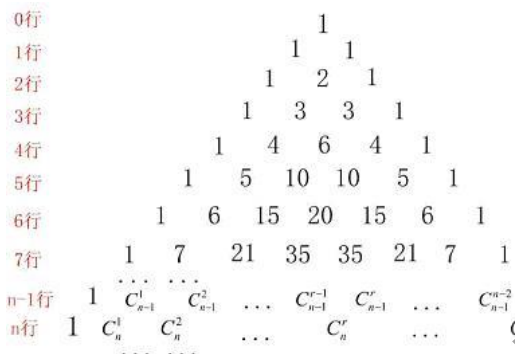
后来,杨辉随孩童来到老先生家里,与老先生谈论起数学问题来。老先生说:“北周的甄鸾注《数术记遗》一书中写过‘九宫者,二四为肩,六八为足,左三右七,戴九履一,五居中央。’”杨辉听了,这与自己与孩童摆出来的完全一样。便问老先生:“你可知这个九宫图是如何造出来的?”老先生说不知道。

杨辉回到家中,反复琢磨。一天,他终于发现一条规律,并总结成四句话:“九子斜排,上下对易,左右相更,四维挺出”。就是说:先把1~9九个数依

次斜排, 再把上1下9两数对调, 左7右3两数对调, 最后把四面的2、4、6、8向外面挺出, 这样三阶幻方就填好了。

杨辉研究出三阶幻方(也叫络书或九宫图)的构造方法后, 又系统的研究了四阶幻方至十阶幻方。在这几种幻方中, 杨辉只给出了三阶、四阶幻方构造方法的说明, 四阶以上幻方, 杨辉只画出图形而未留下作法。但他所画的五阶、六阶乃至十阶幻方全都准确无误, 可见他已经掌握了高阶幻方的构成规律。

★问题 1: “横看成岭侧成峰, 远近高低各不同”, 你能从横看、纵看或其他角度观察杨辉三角形, 并能发现杨辉三角形中有哪些有趣的数字排列规律吗?



答: (1) 从横看, 在同一行中, 每行两端都是1, 与这两个1等距离的项的系数相等。——“对称性”。

这恰好验证了一个组合数的性质:

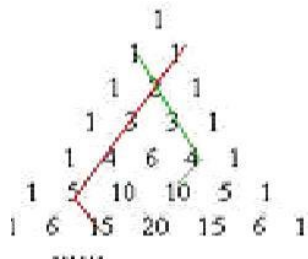
(2) 在相邻的两行中, 除1以外的每一个数都等于它“肩上”两个数的和。——“递推性”。

这也恰好验证了另一个组合数的性质:

★问题 2: 把每一行的数加起来又有什么规律?

答: _____

★问题 3: 从斜着看你还能发现什么规律吗?



选择性必修3 第七章、随机变量及其分布

7.1.1 条件概率

[问题提出] 我们知道, 若事件 A 与事件 B 相互独立时, 有 $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

那么, 若事件 A 与 B 不独立, 如何求解积事件 AB 的概率呢?

【探究 1】 某班有 45 名学生, 其中男生、女生的人数及其团员的人数如下表:

	团员	非团员	合计
男生	16	9	25
女生	14	6	20
合计	30	15	45

现在在班级里随机选择一人做代表,

(1) 选到男生的概率是多大?

(2) 如果已知选到的是团员, 那么选到的是男生的概率是多大? 选到的是女生的概率又是多大?

【思考 1】 你能说出 (1) 问和 (2) 问选到男生的概率为什么不一样的原因吗?

【探究 2】 假定生男孩和生女孩是等可能的, 现考虑有两个小孩的家庭, 随机选择一个家庭, 那么

(1) 该家庭中两个小孩都是女孩的概率是多大?

(2) 如果已经知道这个家庭有女孩, 那么两个小孩都是女孩的概率又是多大?

【思考 2】 你认为样本空间的改变对事件发生概率的改变有影响吗? 如何定义此类事件的概率?

条件概率的定义:

一般地, 设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

称为在事件 A 发生的条件下, 事件 B 发生的条件概率。(简称条件概率)

一般把 $P(B|A)$ 读作 A 发生的条件下 B 发生的概率。

注意:

(1) 条件概率的取值在 0 和 1 之间, 即 $0 \leq P(B|A) \leq 1$

(2) 如果 B 和 C 是互斥事件, 则

$$P(B \cup C | A) = P(B|A) + P(C|A)$$

(3) 设 $\bar{B}$ 和 B 互为对立事件, 则

$$P(\bar{B} | A) = 1 - P(B | A).$$

(4) 要注意 $P(B|A)$ 与 $P(AB)$ 的区别, 这是分清条件概率与一般概率问题的关键。同时也要注意 $P(B|A)$ 和 $P(A|B)$ 的意义的区别。

【思考 3】 概率 $P(B|A)$ 与 $P(AB)$ 的区别与联系

概率乘法公式:

对任意两个事件 A 与 B , 若 $P(A) > 0$, 则:

特别地, 若 $P(B|A) = P(B)$, 也即

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

称事件 A 与 B 相互独立。

【例一】 在 5 道题中有 3 道代数题和 2 道几何题, 如果不放回地依次抽取 2 道题, 求:

(1) 第一次抽取到代数题的概率;

(2) 第一次抽到代数题, 第二次抽到几何题的概率;

(3) 在第一次抽到代数题的条件下, 第二次抽到几何题的概率。

练习 1、(福州高二检测) 已知盒中装有大小一样, 形状相同的 3 个白球与 7 个黑球, 每次从中任取一个球并不放回, 则在第 1 次取到白球的条件下, 第 2 次取到的是黑球的概率为()

- A. $\frac{3}{10}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{7}{8}$ D. $\frac{7}{9}$

【例二】盒内装有除型号和颜色外完全相同的 16 个球, 其中 6 个是 E 型玻璃球, 10 个是 F 型玻璃球. E 型玻璃球中有 2 个是红色的, 4 个是蓝色的; F 型玻璃球中有 3 个是红色的, 7 个是蓝色的. 现从中任取 1 个, 已知取到的是蓝球, 问该球是 E 型玻璃球的概率是多少?

练习 2 (1)(全国新课标 II) 某地区空气质量监测资料表明, 一天的空气质量为优良的概率是 0.75, 连续两天为优良的概率是 0.6, 已知某天的空气质量为优良, 则随后一天的空气质量为优良的概率是()

- A. 0.8 B. 0.75 C. 0.6 D. 0.45

(2)(山东泰安模拟) 抛掷红、蓝两颗骰子, 记事件 A 为“蓝色骰子的点数为 4 或 6”, 事件 B 为“两颗骰子

的点数之和大于 8”, 则 $P(B|A)=$ _____; $P(A|B)=$ _____.

点评: 条件概率的两种计算方法

①在原样本空间中, 先计算 $P(AB)$, $P(A)$, 再利用公式

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

计算求得 $P(B|A)$;

②若事件为古典概型, 可利用公式 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$, 即在缩小后的样本空间中计算事件 B 发生的概率.

【例三】在某次考试中, 要从 20 道题中随机的抽出 6 道题, 若考生至少能答对其中的 4 道题即可通过; 若能答对其中的 5 道题就能获得优秀. 已知某考生能答对其中的 10 道题, 并且已知道他在这次考试中已经通过, 求他获得优秀成绩的概率.

练习 3、银行储蓄卡的密码由 6 位数字组成, 某人在银行自助取款机上取钱时, 忘记了密码的最后一位数字, 求:

- (1) 任意按最后一位数字, 不超过 2 次就按对的概率;
- (2) 如果记得密码的最后一位是偶数, 不超过 2 次就按对的概率.

练习 4、某生在一次考试中, 共有 10 道题供选择, 已知该生会答其中 6 道题, 随机从中抽 5 道题供该生回答, 至少答对 3 道题则及格, 求该生在第一题不会答的情况下及格的概率.

7.1.2 全概率公式

【引入问题】从有 a 个红球和 b 个蓝球的袋子中，每次随机摸出 1 个球，摸出的球不再放回. 显然，第 1 次摸到红球的概率为 $\frac{a}{a+b}$. 那么第 2 次摸到红球的概率是多大？如何计算这个概率呢？

知识点 1 全概率公式

一般地，设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件， $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ ，则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$ ，有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$.

注：全概率公式体现了转化与化归的数学思想，即采用化整为零.（思考 1：如何证明？）

【例一】某学校有 A, B 两家餐厅，王同学第 1 天午餐时随机地选择一家餐厅用餐. 如果第 1 天去 A 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.6；如果第 1 天去 B 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.8. 计算王同学第 2 天去 A 餐厅用餐的概率.

【点评】全概率公式求概率的步骤：

1. 把事件 B（结果事件）看作某一过程的结果，把 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 看作导致结果的若干个原因；
2. 由已知，写出每一原因发生的概率（即 $P(A_i)$ ），且每一原因对结果的影响程度（即 $P(B|A_i)$ ）；
3. 用全概率公式计算结果发生的概率（即 $P(B)$ ）.

练习 1：某公司有三个制造厂，全部产品的 40% 由甲厂生产，45% 由乙厂生产，15% 由丙厂生产，而甲、乙、丙三厂生产的不合格品率分别为 1%，2%，3%. 求从该公司产品中随机抽出一件产品为不合格品的概率.

【例二】有 3 台车床加工同一型号的零件，第 1 台加工的次品率为 6%，第 2、3 台加工的次品率平均为 5%，加工出来的零件混放在一起，已知第 1、2、3 台车床加工的零件数分别占总数的 25%, 30%, 45%.

- (1) 任取一个零件，计算它是次品的概率；
- (2) 如果取到的零件是次品，计算它是第 i ($i=1, 2, 3$) 台车床加工的概率.

(思考 2：例二的计算过程中的 $P(A_i)$ ， $P(A_i|B)$ 的实际意义是什么？)

知识点 2 贝叶斯公式

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件， $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ ，且 $P(A_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$ ，则对任意的事件 $B \subseteq \Omega, P(B) > 0$ ，有：($i=1, 2, \dots, n$.)

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B|A_k)},$$

思考 3：全概率公式与贝叶斯公式的区别是什么？

提示：两者最大的不同在于处理的对象不同，全概率公式用来计算复杂事件的概率，而贝叶斯公式是用来计算简单条件下发生的复杂事件，也就是说全概率公式是计算普通概率的，贝叶斯公式是用来计算条件概率的. 【可阅读课本 P53-55 阅读与思考】

练习 2：如图，甲盒里有 3 个黄球，2 个蓝球，乙盒里有 4 个黄球，1 个蓝球. 某人随机选择一个盒子并从中摸出了一个黄球，若此人选择甲盒或乙盒的概率相等，求这个黄球来自甲盒的概率.



【例三】若一位朋友从外地来看望小文，已知该朋友坐火车、轮船、汽车、飞机的概率分别是 0.3, 0.2, 0.1, 0.4，且他坐火车、轮船、汽车、飞机迟到的概率分别是 0.25, 0.3, 0.1, 0.若该朋友迟到了，推测他坐哪种交通工具的可能性大.

练习 3：某一地区有 0.5% 的人患有某疾病，并且这种病的患者对一种试验反应是阳性的概率为 0.95，而正常人对这种试验反应是阳性的概率为 0.04.

现知道该地区某人的试验反应是阳性，问此人是患者的概率有多大（精确到 0.01）？

7.2 离散型随机变量及其分布列

【阅读课本 P56-58】

【问题 1】:把一枚硬币向上抛,可能会出现哪几种结果?能否用数字来刻画这种随机试验的结果呢?

说明:

- (1)任何一个随机试验的结果我们可以进行**数量化**;
 (2)同一个随机试验的结果,可以赋不同的数值

知识点 1 离散型随机变量(概念)

(1)**随机变量**:对于随机试验样本空间 Ω 中的每一个样本点 ω ,都有 唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应,我们称 X 为随机变量.

(2)**离散型随机变量**:可能取值为 有限个 或可以 一一列举 的随机变量,我们称之为离散型随机变量.

(对比:如果随机变量可能取的值是某个区间的一切值,这样的随机变量叫做**连续型随机变量**.)

(3)离散型随机变量 X 或 Y 的特征:

- ①可用数值表示;
- ②试验之前可以判断其出现的所有值;
- ③在试验之前不能确定取何值;
- ④试验结果能一一列出.

(4)表示:随机变量用大写英文字母表示,如 X, Y, Z, ξ 或 η ; 随机变量的取值用小写英文字母表示,如 x, y, z .

(5)本质:通过引入一个取值依赖于样本点的变量 X ,来刻画样本点和实数的对应关系,实现样本点的数量化.

(6)若 X 是随机变量, $Y = aX + b$, a, b 是常数,则 Y 也是随机变量

思考 1:样本空间中,不同的样本点,对应的变量 X 的取值可以相同吗?

练习 1:(1)将一颗均匀骰子掷两次,不能作为随机变

量的是()

- (A)两次出现的点数之和
 (B)两次掷出的最大点数
 (C)第一次减去第二次的点数差
 (D)抛掷的次数

(2)写出下列各随机变量可能取的值,并说明随机变量所取的值表示的随机试验的结果:

- (1)在 2019 年北京大学的自主招生中,参加面试的 5 名考生中,通过面试的考生人数 X ;
 (2)一个袋中装有 5 个同样的球,编号分别为 1,2,3,4,5. 现从该袋内随机取出 3 个球,被取出的球的最大号码数 X .

【例一】①袋中有大小相同的 5 个小球,分别标有 1、2、3、4、5 五个号码,现在在有放回的条件下取出两个小球,设两个小球号码之和为 X ,则 X 所有可能值的个数是 个;“ $X = 4$ ”表示 .

②抛掷两枚骰子各一次,记第一枚骰子掷出的点数与第二枚骰子掷出的点数的差为 X ,试问:

- (1)“ $X > 4$ ”表示的试验结果是什么?
 (2) $P(X > 4) = ?$

【问题 2】:对于一个随机试验,仅仅知道试验的可能结果是不够的,还要能把握每一个结果发生的概率.

知识点 2 离散型随机变量的分布列

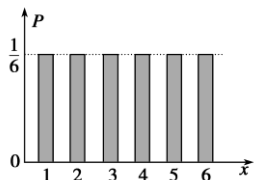
(1)定义:设离散型随机变量 X 的可能取值为 $x_1, x_2, \dots, x_n$,我们称 X 取每一个值 x_i 的概率 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots, n$ 为 X 的 概率分布列,简称 分布列.

(2)表示方法:表格

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

概率分布图(掷骰子试验中掷出的点数 X 的分布列

图)



(3) 离散型随机变量的分布列性质::

① $p_i \geq 0$, $i=1, 2, \dots, n$;

② $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

【例二】随机变量 X 的概率分布规律为 $P(X=n) = \frac{a}{n(n+1)}$ ($n=1, 2, 3, 4$), 其中 a 是常数, 则 $P(\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2})$ 的值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

练习 2. 设随机变量 ξ 的分布为 $P(\xi=k) = a(\frac{1}{3})^k$, $k=1, 2, 3$, 则 a 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{9}{13}$ C. $\frac{11}{13}$ D. $\frac{27}{13}$

【例三】设随机变量 X 的分布列为 $P(X=\frac{k}{5}) = ak$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$).

(1) 求常数 a 的值;(2) 求 $P(X \geq \frac{3}{5})$;(3) 求 $P(\frac{1}{10} < X < \frac{7}{10})$.

练习 3. 随机变量 X 的分布列为 $P(X=i) = \frac{i}{10}$ ($i=1, 2, 3, 4$), 若 $P(1 \leq X < a) = \frac{3}{5}$, 则实数 a 的取值范围为_____.

【例四】袋中装着标有数字 1, 2, 3, 4, 5 的小球各 2 个, 从袋中任取 3 个小球, 按 3 个小球上最大数字的 9 倍计分, 每个小球被取出的可能性都相等, 用 X 表示取出的 3 个小球上的最大数字, 求:

(1) 取出的 3 个小球上的数字互不相同的概率;

(2) 随机变量 X 的分布列;

(3) 计算介于 20 分到 40 分之间的概率.

练习 4. 从装有除颜色外完全相同的 6 个白球, 4 个黑球和 2 个黄球的箱中随机地取出两个球, 规定每取出 1 个黑球赢 2 元, 而每取出 1 个白球输 1 元, 取出黄球无输赢.

(1) 以 X 表示赢得的钱数, 随机变量 X 可以取哪些值?求 X 的分布列;(2) 求出赢钱(即 $X > 0$) 的概率.

【例五】一个袋中装有除颜色外其他都相同的 3 个白球和 4 个红球.

(1) 从中任意摸出 1 个球, 用 0 表示摸出白球, 用 1 表示摸出红球, 即 $X = \begin{cases} 0, & \text{摸出白球} \\ 1, & \text{摸出红球} \end{cases}$ 求 X 的分布列;

(2) 从中任意摸出两个球, 用 $X=0$ 表示“两个球全是白球”, 用 $X=1$ 表示“两个球不全是白球”, 求 X 的分布列.

7.3.1 离散型随机变量的均值

前面,我们认识了随机变量的分布列.对于离散型随机变量,确定了它的分布列,就掌握了随机变量取值的统计规律.但在实际应用中,我们还常常希望直接通过数字来反映随机变量的某个方面的特征,最常用的有期望与方差.

一、数学期望

一般地,随机变量 ξ 的概率分布列为:

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$	p_n

则称 $E\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_i p_i + \cdots + x_n p_n$ 为 ξ 的数学期望或均值,简称期望.均值是随机变量可能取值关于取值概率的加权平均数,它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

二、数学期望性质

根据定义可推出下面两个结论:

1、若 $\eta = a\xi + b$, 其中 a, b 为常数, ξ 是随机变量,

① η 也是随机变量;

② $E(\eta = a\xi + b) =$ _____.

2. 两点分布的均值

两点分布: 若 ξ 服从两点分布, 则 $E(\xi) =$ _____.

(练习 1): 在篮球比赛中,罚球命中 1 次得 1 分,不中得 0 分,如果某运动员罚球命中的概率为 0.8,那么他罚球 1 次的得分 X 的均值是多少?

(练习 2): 抛掷一枚质地均匀的骰子,设出现的点数为 X ,求 X 的均值.

【思考】如果做两次试验,一次重复抛骰子 60 次,一次重复抛骰子 300 次,计算两次试验的均值,它们与样本均值有何联系与区别?

【例一】猜歌名游戏是根据歌曲的主旋律制成的铃声来猜歌名.某嘉宾参加猜歌名节目,猜对每首歌曲的歌名相互独立,猜对三首歌曲 A, B, C 歌名的概率及猜对时获得相应的公益基金如下表所示:

规则如下: 按照 A, B, C 的顺序猜,只有猜对当前歌曲的歌名才有资格猜下一首,

(1) 求嘉宾获得的公益基金总额 X 的分布列及均值.

歌曲	A	B	C
猜对的概率	0.8	0.6	0.4
获得的公益基金额/元	1000	2000	3000

(2) 如果改变猜歌的顺序,获得公益基金的均值是否相同,如果不同,你认为哪个顺序获得的公益基金均值最大?

【例二】已知随机变量 X 的分布列如下:

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	m	$\frac{1}{20}$

(1) 求 m 的值; (2) 求 $E(X)$;

(3) 若 $Y = 2X - 3$, 求 $E(Y)$.

【例三】已知箱中装有4个白球和5个黑球，且规定：取出一个白球得2分，取出一个黑球得1分. 现从该箱中任取(无放回，且每球取到的机会均等)3个球，记随机变量 X 为取出此3球所得分数之和.

- (1)求 X 的分布列；
(2)求 X 的数学期望 $E(X)$.

【例四】(石家庄高二检测)集成电路 E 由3个不同的电子元件组成，现由于元件老化，三个电子元件能正常工作的概率分别降为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ ，且每个电子元件能否正常工作相互独立. 若三个电子元件中至少有2个正常工作，则 E 能正常工作，否则就需要维修，且维修集成电路 E 所需费用为100元.

- (1)求集成电路 E 需要维修的概率；
(2)若某电子设备共由2个集成电路 E 组成，设 X 为该电子设备需要维修集成电路所需的费用，求 X 的分布列和期望.

【例五】(1)(多选题)离散型随机变量 X 的可能取值为1, 2, 3, 4, $P(X=k)=ak+b(k=1, 2, 3, 4)$, $E(X)=3$, 则()

- A. $a=10$ B. $a=\frac{1}{10}$ C. $b=0$ D. $b=1$

(2)(多选题)(2022 浙江丽水高二月考)设 $0<p<1$ ，随机变量 ξ 的分布列如下，则下列结论正确的有()

ξ	0	1	2
p	$p-p^2$	p^2	$1-p$

- A. $E(\xi)$ 随着 p 的增大而增大
B. $E(\xi)$ 随着 p 的增大而减小
C. $P(\xi=0)<P(\xi=2)$ D. $P(\xi=2)$ 的值最大

(3)已知随机变量 ξ 和 η ，其中 $\eta=4\xi-2$ ，且 $E(\eta)=7$ ，若 ξ 的分布列如下表，则 n 的值为_____.

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	m	n	$\frac{1}{12}$

(4)一个盒子里有1个红1个绿2个黄四个相同的球，每次拿一个，不放入，拿出红球即停，设拿出黄球的个数为 ξ ，则 $P(\xi=0)=$ _____； $E(\xi)=$ _____.

【例六】某公司拟资助三位大学生自主创业，现聘请两位专家，独立地对每位大学生的创业方案进行评审. 假设评审结果为“支持”或“不支持”的概率都是 $\frac{1}{2}$. 若某人获得两个“支持”，则给予10万元的创业资助；若只获得一个“支持”，则给予5万元的资助；若未获得“支持”，则不予资助，令 ξ 表示该公司的资助总额.

- (1)写出 ξ 的分布列；
(2)求数学期望 $E(\xi)$.

7.3.2 离散型随机变量的方差

知识点 离散型随机变量的方差、标准差

(1)定义: 如果离散型随机变量 X 的分布列如表所示:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

因为 X 的均值为 $E(X)$, 所以

$$D(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \cdots + (x_n -$$

$$E(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i, \text{ 称为随机变量 } X \text{ 的方差,}$$

有时也记作: $\text{Var}(X)$, 并称 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差. 记作: $\sigma(X)$.

(2)意义: 随机变量的方差和标准差都反映了随机变量取值的离散程度, 方差和标准差越小, 随机变量的取值越集中; 方差与标准差越大, 随机变量的取值越分散.

(3)离散型随机变量 X 的均值与方差的性质:

均值的性质: $E(aX + b) = aE(X) + b.$

方差的性质: $D(aX + b) = a^2 D(X).$

标准差的性质: $\sigma(aX + b) = |a| \sqrt{D(X)} = |a| \sigma(X).$

[思考 1] 离散型随机变量的方差和样本方差之间有何关系?

提示: (1)离散型随机变量的方差即为总体的方差, 它是一个常数, 不随样本的变化而变化; (2)样本方差则是随机变量, 它是随样本不同而变化的.

[思考 2] 证明: 如果 X 是一个离散型随机变量, 则

$$D(aX + b) = a^2 \cdot D(X) \text{ (其中 } a, b \text{ 为常数)}$$

[思考 3] 推导下面的公式:

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

【例一】 (1) 抛掷一枚质地均匀的骰子, 求掷出的点数 X 的方差.

(2) 袋中有 20 个大小相同的球, 其中记上 0 号的有 10 个, 记上 n 号的有 n 个 ($n=1, 2, 3, 4$). 现从袋中任取一球, 随机变量 X 表示所取球的标号. 求 X 的分布列、均值和方差;

【例二】 投资 A, B 两种股票, 每股收益的分布列分别如下表所示.

股票A收益的分布列				股票B收益的分布列			
收益 X /元	-1	0	2	收益 Y /元	0	1	2
概率	0.1	0.3	0.6	概率	0.3	0.4	0.3

(1) 投资哪种股票的期望收益大?

(2) 投资哪种股票的风险较高?

【练习1】有10张卡片,其中8张标有数字2,2张标有数字5,从中随机地抽取3张卡片,设3张卡片所标数字之和为 X ,求 $E(X)$ 和 $D(X)$.

【练习2】有甲乙两个单位都愿意聘用你,而你能获得如下信息:

甲单位不同职位月工资 X /元	1200	1400	1600	1800
获得相应职位的概率 P	0.4	0.3	0.2	0.1

乙单位不同职位月工资 X /元	1000	1400	1800	2200
获得相应职位的概率 P	0.4	0.3	0.2	0.1

根据工资待遇的差异情况,你愿意选择哪家单位?

【例三】已知随机变量 X 的分布列如下:

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	a

- (1)求随机变量 X^2 的分布列;
- (2)计算 X 的方差;
- (3)若随机变量 $Y=4X+3$,求 Y 的均值和方差.

【例四】(1)(2022·江西南昌高二联考)若随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	0.2	m

已知随机变量 $Y=aX+b(a, b \in \mathbf{R}, a>0)$ 且 $E(Y)=10$, $D(Y)=4$,则 a 与 b 的值为()

- A. $a=10, b=3$ B. $a=3, b=10$
C. $a=5, b=6$ D. $a=6, b=5$

(2)已知随机变量 X 的分布列如下表,且 $E(X)=2$,则 $p=$ __, $D(2X-3)=$ __.

X	0	2	a
P	$\frac{1}{6}$	p	$\frac{1}{3}$

【例五】设盒子中装有6个红球,4个白球,2个黑球,且规定:取出一个红球得 a 分,取出一个白球得 b 分,取出一个黑球得 c 分,其中 a, b, c 都为正整数.

(1)当 $a=1, b=2, c=3$ 时,从该盒子中依次任取(有放回,且每球取到的机会均等)2个球,记随机变量 ξ 为取出此2球所得分数之和,求 ξ 的分布列;

(2)当 $a=1$ 时,从该盒子中任取(每球取到的机会均等)1个球,记随机变量 η 为取出此球所得分数,若 $E(\eta)=\frac{5}{3}, D(\eta)=\frac{5}{9}$,求 b 和 c .

7.4.1 独立重复试验与二项分布

1、知识点1 n 重伯努利试验

(1)伯努利试验：我们把只包含两个可能结果的试验叫做伯努利试验.

(2)定义：我们将一个伯努利试验独立地重复进行 n 次所组成的随机试验称为 n 重伯努利试验.

(3)特征：①同一个伯努利试验重复做 n 次；

②各次试验的结果相互独立，互相之间没有影响.

思考：定义中“重复”的含义是什么？

提示：“重复”意味着各次试验成功的概率相同.

(练习1)：下列事件：①甲、乙两运动员各射击一次，“甲射中10环”与“乙射中9环”；②甲、乙两运动员各射击一次，“甲、乙都射中目标”与“甲、乙都没射中目标”；③某飞碟运动员每次射击中靶的概率为0.8，连续射击3次；④在相同的条件下，甲射击10次，5次击中目标；⑤一批产品的次品率为5%，不放回地随机抽取20件. 其中是 n 重伯努利试验的个数为()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【引例】某飞碟运动员每次射击中靶的概率为0.8，连续射击3次，中靶次数 X 的概率分布列是怎样的？

问题：① 3次中恰有1次中靶，有几种情况？

②它们的概率分别是多少？

③3次中恰有1次中靶的概率是多少？

变式一：3次中恰有2次中靶的概率是多少？

变式二：中靶次数 X 的概率分布列是怎样的？

变式三：若连续射击4次，表示中靶次数 $X=2$ 的结果有哪些？概率是多少？

变式四：连射击 n 次，恰有 k 次中靶的概率是？写出中靶次数 X 的分布列.

2、知识点2 二项分布

若将事件 A 发生的次数设为 X ，发生的概率为 p ，不发生的概率 $q=1-p$ ，那么在 n 次独立重复试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率是 $P(X=k)=$ _____ ($k=0,1,2, \dots, n$),

于是得到 X 的分布列为：

X	0	1	2	...	n
P				...	

由于表中第二行恰好是二项式展开式

$(q+p)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n p^n q^0$ 各对应项的值，故称这样的离散型随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布，记作_____.

有二项式定理，容易得到：

$$\sum_{k=0}^n P(X=k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1$$

【例一】某气象站天气预报的准确率为80%，计算

(1)5次预报中恰有2次准确的概率；

(2)5次预报中至少有2次准确的概率；

(3)5次预报中恰有2次准确，且其中第3次预报准确的概率.

【例二】 一名学生每天骑自行车上学, 从家到学校的途中有 5 个交通岗, 假设他在各交通岗遇到红灯的事件是相互独立的, 并且概率都是 $\frac{1}{3}$.

(1) 求这名学生在途中遇到红灯的次数 ξ 的分布列;

(2) 求这名学生在首次遇到红灯或到达目的地停车前经过的路口数 η 的分布列.

〔提示〕确定一个二项分布模型的步骤:

- ① 明确伯努利试验及事件 A 的意义, 确定事件 A 发生的概率 p ;
- ② 确定重复试验的次数 n , 并判断各次试验的独立性;
- ③ 设 X 为 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, 则 $X \sim B(n, p)$.

【例三】 已知一个射手每次击中目标的概率为 $p = \frac{3}{5}$,

求他在 4 次射击中下列事件发生的概率:

- (1) 恰命中一次;
- (2) 恰只在第三次命中目标;
- (3) 恰命中两次;
- (4) 刚好在第二、第三两次击中目标.
- (5) 记 X 为 4 次射击中命中的次数, 求 X 的分布列及其期望.

【例四】 某商场为刺激消费, 拟按以下的方案进行促销: 顾客每消费 500 元便得到奖券一张, 每张奖券的中奖概率为 $\frac{1}{2}$, 若中奖, 商场返还顾客现金 100 元. 某顾客现购买价格为 2 300 元的台式电脑一台, 得到奖券 4 张.

(1) 设该顾客中奖的奖券张数为 X , 求 X 的分布列;

(2) 设该顾客购买台式电脑的实际支出为 Y 元, 用 X 表示 Y , 并求 Y 的数学期望.

【例五】 甲、乙两选手进行象棋比赛, 如果每局比赛甲获胜的概率为 0.6, 乙获胜的概率为 0.4, 那么采用 3 局 2 胜制还是采用 5 局 3 胜制对甲更有利?

知识点 3 二项分布的均值与方差 (推导见课本)

如果, $X \sim B(n, p)$, 那么:

$$E(X) = np, \quad D(X) = np(1-p)$$

7.4.2 超几何分布

问题引入：已知 10 件产品中有 4 件次品，分别采用有放回和不放回的方式随机抽取 3 件. 设抽取的 3 件产品中次品数为 X ，求随机变量 X 的分布列.

问题 1：如果采用有放回的抽样， X 服从怎样的分布列？

问题 2：如果采用不放回的抽样，你能否写出 X 的分布列？

解：

1、知识点 超几何分布

(1)定义：一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品. 从 N 件产品中随机抽取 n 件(不放回)，用 X 表示抽取的 n 件产品的次品数，则 X 的分布列为

$$P(X=k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k=m, m+1, m+2, \dots, r.$$

其中 $n, N, M \in \mathbf{N}^*$, $M \leq N$, $n \leq N$,

$m = \max\{0, n - N + M\}$, $r = \min\{n, M\}$. 如果随机变量 X 的分布列具有上式的形式，那么称随机变量 X 服从超几何分布.

【思考 1】超几何分布有哪些显著的特征？

超几何分布特征：

(1) “由较明显的两部分组成”；

(2) 不放回抽样：

(练习 1) 从 50 名学生中随机选出 5 名学生代表，则甲被选中的概率为_____.

(练习 2) 一批零件共有 30 个，其中有 3 个不合格，随机抽取 10 个零件进行检测，求至少有 1 件不合格的概率.

(练习 3) (2020 湖南长沙高二月考)一工厂生产 100 个产品中有 90 个一等品、10 个二等品，现从这批产品中抽取 4 个，则其中恰好有一个二等品的概率为()

A. $1 - \frac{C_{90}^4}{C_{100}^4}$

B. $\frac{C_{10}^1 C_{90}^3 + C_{10}^2 C_{90}^2}{C_{100}^4}$

C. $\frac{C_{10}^4}{C_{100}^4}$

D. $\frac{C_{10}^1 C_{90}^3}{C_{100}^4}$

问题 3：服从超几何分布的随机变量的均值是什么？

超几何分布随机变量的均值(期望)：

$E(X) = np$ ，其中 $p = \frac{M}{N}$ 是 N 件产品的次品率.

【例一】某大学志愿者协会有 6 名男同学，4 名女同学. 在这 10 名同学中，3 名同学来自数学学院，其余 7 名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院. 现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学，到希望小学进行支教活动(每位同学被选到的可能性相同).

(1)求选出的 3 名同学来自互不相同的学院的概率；

(2)设 X 为选出的 3 名同学中女同学的人数，求随机变量 X 的分布列及其期望.

【例二】一袋中有 100 个大小相同的小球，其中有 40 个黄球、60 个白球，从中随机摸出 20 个球作为样本 . 用 X 表示样本中黄球的个数.

(1) 分别就有放回和不放回摸球，求 X 的分布列及各自的期望；

(2) 分别就有放回和不放回摸球，用样本中黄球的比例估计总体中黄球的比例，求误差不超过 0.1 的概率.

果如下表所示，例如表中听觉记忆能力为中等且视觉记忆能力偏高的人数为 3.

		视觉		视觉记忆能力			
		听觉		偏低	中等	偏高	超常
听觉记忆能力	偏低			0	7	5	1
	中等			1	8	3	b
	偏高			2	a	0	1
	超常			0	2	1	1

表中两个数值 a, b 丢失，但已知抽取的 40 人中视觉记忆能力为中等且听觉记忆能力为中等或中等以上的频率为 $\frac{2}{5}$.

(1) 试确定 a 与 b 的值；

(2) 从 40 人中任意抽取 3 人，设听觉记忆能力或视觉记忆能力偏高或超常的人数为 X ，求 X 的分布列；

(3) 若将抽取的 40 人中视觉记忆能力超常的频率视为全市 12 岁儿童中视觉记忆能力超常的概率. 现从全市 12 岁的儿童中任意抽取 3 人，设其中视觉能力超常的人数为 Y ，求 Y 的分布列.

【思考 2】不放回抽取和有放回抽取有何不同？

提示：抽取次数不同，不放回抽取只抽取一次，一次抽取 n 个，有放回抽取要抽取 n 次，每次抽取一个；概率模型不同，不放回抽取服从超几何分布，有放回抽取服从二项分布.

问题 4：超几何分布与二项分布有什么区别？

区别：

超几何分布需要知道总数 N ，而二项分布不需要；超几何分布是不放回抽取，而二项分布是放回抽取(独立重复)；

当总数 N 非常大时，超几何分布近似于二项分布.

☆提示：二项分布的分布列计算要知道概率

超几何分布的分布列计算不需知道概率，只需要抽取所以，先要判断是哪种概型，在进行公式运算

【例三】瞬时记忆能力包括听觉记忆能力与视觉记忆能力. 某地区为了对 12 岁儿童的瞬时记忆能力进行调查，随机抽取了该地区 40 名 12 岁的儿童，其调查结

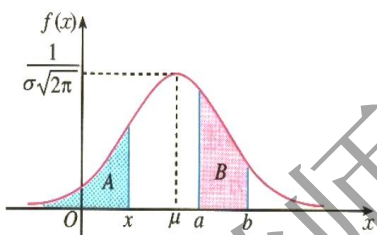
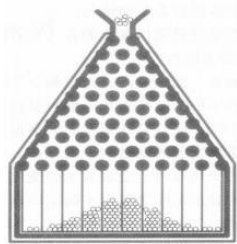
7.5 正态分布

【引入】

我们知道,离散型随机变量最多取可列个不同值,人们感兴趣的是它取某些特定值的概率,即感兴趣的是其分布列;连续型随机变量可能取某个区间上的任何值,它等于任何一个实数的概率都为0,所以通常感兴趣的是它落在某个区间的概率。正态分布是自然界中最常见的一种分布,也是统计学中是很重要的分布,许多现象都近似服从正态分布,如长度测量误差,安师大附中高二年级期中考试的成绩,某一年龄男同学身高等。离散型随机变量的概率分布规律用分布列描述,而连续型随机变量的概率分布规律用密度函数(曲线)描述。

【课件展示】

高尔顿钉板试验



1、正态分布密度曲线(正态曲线)的定义

函数 $f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$, 其中实数 μ ,

$\sigma(\sigma > 0)$ 为参数,我们称 $f_{\mu,\sigma}(x)$ 的图象为正态分布密度曲线,简称正态曲线(如上右图)。

2. 正态分布

一般地,如果对于任何实数 $a, b(a < b)$, 随机变量 X 满足 $P(a < X \leq b) = \int_a^b f_{\mu,\sigma}(x) dx$, 则称随机变量 X 服从正态分布(normal distribution)。正态分布完全由参数 μ 和 σ 确定,因此正态分布常记作:_____。

如果随机变量 X 服从正态分布,则记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

[注:若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则如图所示, X 取值不超过 x 的概率 $P(X \leq x)$ 为图中区域 A 的面积,而 $P(a \leq X \leq b)$ 为区域 B 的面积.]

2、标准正态分布

当 $\mu = 0, \sigma = 1$, 时 $\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$,

记为 $X \sim N(0, 1)$, 称 X 服从标准正态分布,相应曲线为标准正态曲线。

3、正态曲线的特点

①曲线位于 x 轴_____, 与 x 轴不相交, 当 $|x|$ 无限增大时, 曲线无限接近 x 轴;

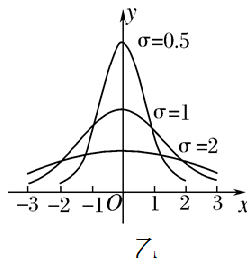
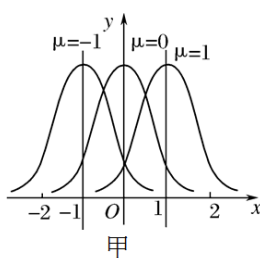
②曲线是单峰的, 它关于直线_____对称;

③曲线在 $x = \mu$ 处达到峰值_____;

④曲线与 x 轴之间的面积为_____;

⑤当 σ 一定时, 曲线的位置由 μ 确定, 曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移, 如图甲所示;

⑥当 μ 一定时, 曲线的形状由 σ 确定, σ 越大, 曲线越_____, 总体分布越_____; σ 越小, 曲线越_____. 总体分布越_____, 如图乙所示,



★⑦若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$

5、正态总体三个特殊区间内取值的概率值

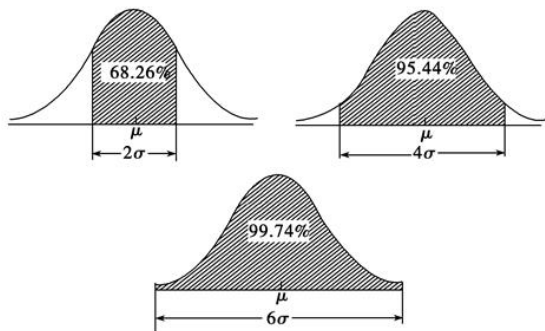
① $P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) =$ _____;

② $P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) =$ _____;

③ $P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) =$ _____;

6、3σ 原则

通常认为服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随机变量 X 只取 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 之间的值, 简称 3σ 原则。



例题解析

【例一】李明上学有时坐公交车,有时骑自行车.他各记录了 50 次坐公交车和骑自行车所花的时间,经数据

分析得到:坐公交车平均用时 30 min. 样本方差为 36; 骑自行车平均用时 34 min. 样本方差为 4. 假设坐公交车用时 X 和骑自行车用时 Y 都服从正态分布.

- (1) 估计 X, Y 的分布中的参数;
- (2) 根据 (1) 中的估计结果, 利用信息技术工具画出 X 和 Y 的分布密度曲线;
- (3) 如果某天有 38 min 可用, 李明应选择哪种交通工具? 如果某天只有 34 min 可用, 又应该选择哪种交通工具? 请说明理由.

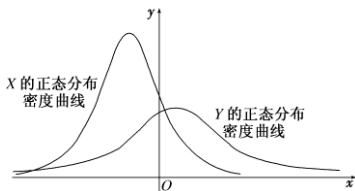
【例二】(1) 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 若 $P(\xi > 2) = 0.023$, 则 $P(-2 < \xi < 2) = (\quad)$

- A. 0.477 B. 0.625
C. 0.954 D. 0.977

(2) (临沂高二检测) 设随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, 若 $P(\xi > c) = a$, 则 $P(\xi > 4 - c)$ 等于 $(\quad)$

- A. a B. $1 - a$
C. $2a$ D. $1 - 2a$

(3) (多选题) 设 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 这两个正态分布密度曲线如图所示, 下列结论中错误的是 $(\quad)$



A. $P(Y \geq \mu_2) \geq P(Y \geq \mu_1)$

B. $P(X \leq \sigma_2) \leq P(X \leq \sigma_1)$

C. 对任意正数 t , $P(X \geq t) \geq P(Y \geq t)$

D. 对任意正数 t , $P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$

(4) 已知某批零件的长度误差 X (单位: 毫米) 服从正态分布 $N(0, 3^2)$, 从中随机取一件, 其长度误差落在区间 $(3, 6)$ 内的概率为 $(\quad)$

- A. 0.045 6 B. 0.135 9
C. 0.271 8 D. 0.317 4

☆点评: 注意概率值的求解转化:

① $P(X < a) = 1 - P(X \geq a)$;

② $P(X < \mu - a) = P(X \geq \mu + a)$;

③ 若 $b < \mu$, 则 $P(X < b) = \frac{1 - P(\mu - b < X < \mu + b)}{2}$.

【例三】从某企业的某种产品中抽取 500 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量结果得频率分布直方图:

(1) 求这 500 件产品质量指标值的样本平均数 $\bar{x}$ 和样本方差 s^2 (同一组数据用该区间的中点值作代表);

(2) 由频率分布直方图可以认为, 这种产品的质量指标值 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 近似为样本平均数 $\bar{x}$, σ^2 近似为样本方差 s^2 .

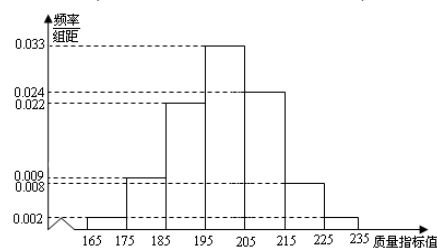
(i) 利用该正态分布, 求 $P(187.8 < Z < 212.2)$;

(ii) 某用户从该企业购买了 100 件这种产品, 记 X 表示这 100 件产品中质量指标值位于区间 $(187.8, 212.2)$ 的产品件数, 利用 (i) 的结果, 求 $E(X)$.

附: $\sqrt{150} \approx 12.2$. 若 $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$,

则 $P(\mu - d < Z < \mu + d) = 0.6826$,

$P(\mu - 2d < Z < \mu + 2d) = 0.9544$.



选择性必修3 第八章：成对数据的统计分析

8.1 成对数据的统计相关性~8.2 一元线性回归模型及最小二乘估计

1、知识点1 样本的相关系数

(1)相关系数：统计学里一般用

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \bar{y}^2)}}$$

来衡量 y 与 x 的

线性相关性的强弱，这里的 r 称为样本相关系数(简称相关系数)。

(2)相关系数的性质

1	$r > 0$ 时，成对数据正相关； $r < 0$ 时，成对数据负相关， $-1 \leq r \leq 1$ 。
2	$ r $ 越小，两个变量之间的线性相关程度越弱， $ r $ 越大，两个变量之间的线性相关程度越强。
3	$ r = 1$ 时，成对数据构成的点都在一条确定的直线上。

2、知识点2 一元线性回归模型

一元线性回归模型的完整表达式为

$$\begin{cases} Y = bx + a + e, \\ E(e) = 0, D(e) = \sigma^2. \end{cases}$$

其中 Y 称为因变量或响应

变量， x 称为自变量或解释变量； a, b 为模型的未知参数， e 是 Y 与 $bx + a$ 之间的随机误差。

3、知识点3 最小二乘法与经验回归方程

(1)最小二乘法

$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 称为 Y 关于 x 的经验回归方程，也称经验回归函数或经验回归公式，其图形称为经验回归直线。这种求经验回归方程的方法叫做最小二乘法，求得的 $\hat{b}, \hat{a}$ 叫做 b, a 的最小二乘估计。

(2)经验回归方程的系数计算公式

经验回归	$\hat{b}$ 的计算公式	$\hat{a}$ 的计算公式
------	-----------------	-----------------

方程		
$\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$	$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$ $= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$	$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$

(3)经验回归方程的性质

①经验回归方程一定过点 $(\bar{x}, \bar{y})$ ；

②一次函数 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ 的单调性由 $\hat{b}$ 的符号决定，函数递增的充要条件是 $\hat{b} > 0$ ；

③ $\hat{b}$ 的实际意义：当 x 增大一个单位时， $\hat{y}$ 增大 $\hat{b}$ 个单位。

3、知识点3 几种常见的非线性回归模型的转化

模型一：幂函数模型

$$(1) \hat{y} = d\sqrt{x} + c \Rightarrow \hat{y} = dt + c$$

$$(2) \hat{y} = b\sqrt{x} + a \Rightarrow \hat{y} = bt + a$$

$$(3) \hat{y} = \frac{b}{x} + a \Rightarrow \hat{y} = bt + a$$

模型二：指数或对数模型

$$(4) \hat{y} = ce^{dx} \Rightarrow \ln \hat{y} = dx + \ln c \Rightarrow \hat{z} = bx + a$$

$$(5) \hat{y} = c_1 \ln x + c_2 \Rightarrow \hat{y} = c_1 t + c_2$$

4、知识点4 残差与残差分析

$$(1) \text{残差: } e_i = y_i - \hat{y}_i$$

(2)对模型刻画数据效果的分析

①残差图法：在残差图中，如果残差比较均匀地集中在以横轴为对称轴的水平带状区域内，则说明经验回归方程较好地刻画了两个变量的关系；

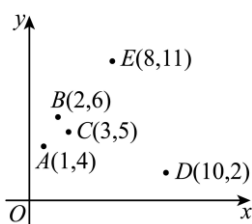
②残差平方和法：残差平方和 $\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$ 越小，模型的拟合效果越好；

③ 决定系数 R^2 法: 可以用 $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$ 来

比较两个模型的拟合效果, R^2 越大, 模型拟合效果越好, R^2 越小, 模型拟合效果越差.

1、(2023 浙江 高三专题练习) 某兴趣小组研究光照时长 x (h) 和向日葵种子发芽数量 y (颗) 之间的关系, 采集 5 组数据, 作如图所示的散点图. 若去掉 $D(10, 2)$ 后, 下列说法正确的是 ()

- A. 相关系数 r 变小
B. 决定系数 R^2 变小
C. 残差平方和变大
D. 解释变量 x 与响应



变量 y 的相关性变强

2、(2017 · 山东 · 理) 为了研究某班学生的脚长 x (单位: 厘米) 和身高 y (单位: 厘米) 的关系, 从该班随机抽取 10 名学生, 根据测量数据的散点图可以看出 y 与 x 之间有线性相关关系, 设其回归直线方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$. 已知

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 225, \sum_{i=1}^{10} y_i = 1600, \hat{b} = 4, \text{ 该班某学生的脚长为 } 24,$$

据此估计其身高为 ()

- A. 160 B. 163 C. 166 D. 170

3、(多选题) (2023 春 湖南 高二校联考期中) 下列命题正确的是 ()

A. 对于事件 A, B , 若 $A \subseteq B$, 且 $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$, 则 $P(B|A) = 1$

B. 若随机变量 $\xi \sim N(2, \sigma^2)$, $P(\xi < 4) = 0.84$, 则 $P(2 < \xi < 4) = 0.16$

C. 相关系数 r 的绝对值越接近 1, 两个随机变量的线性相关程度越强

D. 在做回归分析时, 残差图中残差点分布的带状区域的宽度越宽表示回归效果越好

4、(多选题) 对于表中 x, y 之间的一组数据:

x	1	3	6	7	8
y	1	2	3	4	5

甲、乙两位同学给出的拟合直线方程分别为① $\hat{y} = \frac{1}{3}x + 1$ 和② $\hat{y} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. 若通过分析得出②的拟合效果好, 则下列分析理由正确的是 ()

A. ①的残差和大于②的残差和, 所以②拟合效果更好

B. ①的残差平方和大于②的残差平方和, 所以②拟合效果更好

C. ①的 R^2 小于②的 R^2 , 所以②拟合效果更好

D. 残差图中直线②的残差点分布的水平带状区域比①的残差点分布的水平带状区域更窄, 所以直线②拟合效果更好

5、(多选题) 某公司过去五个月的广告费支出 x (单位: 万元) 与销售额 y (单位: 万元) 之间有下列对应数据:

x	2	4	5	6	8
y	▲	40	60	50	70

工作人员不慎将表格中 y 的第一个数据丢失, 已知 y 对 x 呈线性相关关系, 且经验回归方程为 $\hat{y} = 6.5x + 17.5$, 则下列说法正确的有 ()

A. 销售额 y 与广告费支出 x 正相关

B. 丢失的数据(表中▲处)为 30

C. 该公司广告费支出每增加 1 万元, 销售额一定增加 6.5 万元

D. 若该公司下月广告费支出为 8 万元, 则销售额约为 75 万元

6、为了比较甲、乙、丙、丁四组数据的线性相关性的强弱, 小明分别计算了甲、乙、丙、丁四组数据的线性相关系数, 其数值分别为 $-0.95, -0.87, 0.76, 0.92$, 则这四组数据中线性相关性最强的是_____组数据.

7、在一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n) (n \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 不全相等})$ 的散点图中, 若所有样本点 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ 都在直线 $y = -\frac{1}{5}x + 1$ 上, 则这组样本数据的样本相关系数为_____.

8.3.1 列联表与独立性检验

【学习目标】

1. 了解独立性检验的基本思想、方法及初步应用，会从列联表（只要求 2×2 列联表）、计算比例关系、画等高条形图直观分析两个分类变量是否有关
2. 会用 χ^2 公式判断两个分类变量在某种可信程度上的相关性，理解 $P(\chi^2 \geq k_0)$ 的意义

【重点】 独立性检验的基本思想和步骤，及用 χ^2 公式判断两个分类变量在某种可信程度上的相关性

【难点】 $P(\chi^2 \geq k_0)$ 所表达的确切含义

【课前预习效果检测】(预习课本 P128-134, 完成下面 5 题)

- 1、 对于变量 X 与 Y 的随机变量 χ^2 的观测值 k ，下列说法正确的是 ()

- A. k 越大，“ X 与 Y 有关系”的可信程度越小
- B. k 越小，“ X 与 Y 有关系”的可信程度越小
- C. k 越接近 0，“ X 与 Y 没有关系”的可信程度越小
- D. k 越大，“ X 与 Y 没有关系”的可信程度越大

- 2、 下列 2×2 列联表中 m, n, p, q 的值分别为 ()

	y_1	y_2	总计
x_1	10	35	45
x_2	7	38	p
总计	m	n	q

- A. 70, 73, 45, 188
- B. 73, 17, 45, 90
- C. 17, 73, 45, 45
- D. 17, 73, 45, 90

- 3、 在研究打酣与患心脏病之间的关系中，通过收集数据、整理分析数据得“打酣与患心脏病有关”的结论，并且有 99% 以上的把握认为这个结论是成立的。下列说法中正确的是 ()

- A. 100 个心脏病患者中至少有 99 人打酣
- B. 1 个人患心脏病，那么这个人有 99% 的概率打酣
- C. 在 100 个心脏病患者中一定有打酣的人
- D. 在 100 个心脏病患者中可能一个打酣的人都没有

- 4、 已知两个统计案例如下：

- ① 为了探究患慢性支气管炎与吸烟关系，调查了 339 名 50 岁以上的人，调查结果如下表：

	患慢性气管炎	未患慢性气管炎	总计
吸烟	43	162	205
不吸烟	13	121	134
总计	56	283	339

- ② 为了解某地母亲与女儿身高的关系，随机测得 10 对母女的身高如下表：

母亲身高 (cm)	159	160	160	163	159	154	159	158	159	157
女儿身高 (cm)	158	159	160	161	161	155	162	157	162	156

则对这些数据的处理所应用的统计方法是 ()

- A. ①回归分析②取平均值
- B. ①独立性检验②回归分析
- C. ①回归分析②独立性检验
- D. ①独立性检验②取平均值

- 5、 根据下表，我们可以得到在独立检验中，

当 $\chi^2 > \underline{\hspace{2cm}}$ 时，有 95% 的把握说事件 A 与 B 有关；

当 $\chi^2 > \underline{\hspace{2cm}}$ 时，有 99% 的把握说事件 A 与 B 有关；

当 $\chi^2 \leq \underline{\hspace{2cm}}$ 时，认为没有充分的证据显示“ A 与 B 有关”

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005
χ^2_α	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879

【课堂导学】

【情境引入】

在日常生活中，我们常常关心两个分类变量之间是否有关系，如吸烟与患肺癌之间是否有关系？某肿瘤研究所随机地调查了 9965 人，得到如下结果（单位：人）：

	不患肺癌 (Y=0)	患肺癌 (Y=1)	总计
不吸烟 (X=0)	7775	42	7817
吸烟 (X=1)	2099	49	2148
总计	9874	91	9965

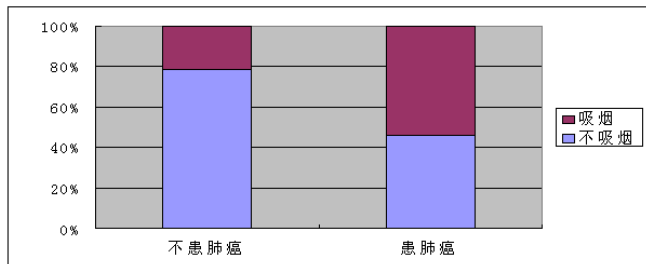
（注：象上表这样列出两个分类变量的频数表，称为 列联表）

★问题 1: 通过上述数据, 你认为“吸烟与患肺癌有关”吗? 简要叙述你是如何分析的? 如何从数量角度刻画?

法一: (计算比重)

在不吸烟的样本中, 有 _____ %患肺癌;
在吸烟的样本中, 则有 _____ %患肺癌.

法二: (画等高条形图)



(此处解释见课本 P10)

★问题 2: 通过数据和图形分析, 我们得到的直观判断是“吸烟和患肺癌 _____”, 那么这种判断的可靠程度有多大呢? 能否利用一个标准对可靠程度进行量化?

【引导思考 1】把上表中数字用字母代替, 得到如下用字母表示的 2×2 列联表:

	不患肺癌	患肺癌	总计
吸烟	a	b	$a+b$
不吸烟	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

如果“吸烟与患肺癌没有关系”, 那么根据概率知识我们可以得到:

$$\frac{a}{a+b} \approx \frac{c}{c+d} \Rightarrow ad - bc \approx 0$$

因此, 当 $|ad - bc|$ 越小, 说明吸烟与患肺癌之间的关系 _____,

当 $|ad - bc|$ 越大, 说明吸烟与患肺癌之间的关系 _____.

【引导思考 2】为了使不同样本容量的数据有统一的标准, 我们可以通过计算一个随机变量 χ^2 来刻画两个分类变量之间的关系的强弱, 其中:

$$\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} \dots\dots (*)$$

(注: $n = a + b + c + d$ 为样本容量)

对于两个分类变量 X 与 Y , 我们可利用 (*) 式算出它们的随机变量 χ^2 的观测值 k , 并有:

k 越小, 说明“ X 与 Y 有关系”的可信程度越 _____;

k 越大, 说明“ X 与 Y 有关系”的可信程度越 _____.

【引导思考 3】利用 (*) 式, 计算得到引入问题中的

χ^2 的观测值为

$$\chi^2 = \frac{9965 \times (\frac{1}{9965} - \frac{1}{9965} \times \frac{1}{9965})^2}{\frac{1}{9965} \times \frac{1}{9965} \times \frac{1}{9965} \times \frac{1}{9965}} \approx 56.632$$

这个值能说明什么呢? 它有什么意义?

【引导思考 4】查“两个分类变量有关系”犯错误概率的临界值表 (如下):

α	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
χ_{α}^2	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

上题中的 $56.632 > 10.828$, 所以得出结论“吸烟与患肺癌”犯错误的概率不超过 $P(\chi^2 > 10.828) \approx 0.001$.

(注释: 上面这种利用随机变量 χ^2 来判断“两个分类变量有关系”的方法称为 _____)

【练习 1】经过对 χ^2 的统计量的研究, 得到了若干个临界值, 当 $\chi^2 > 3.841$ 时, 我们 ()

- A. 有 95% 的把握认为 A 与 B 有关
- B. 有 99% 的把握认为 A 与 B 有关
- C. 没有充分理由说明事件 A 与 B 有关系
- D. 有 97.5% 的把握认为 A 与 B 有关

【例一】在某医院, 因为患心脏病而住院的 665 名男性病人中, 有 214 人秃顶, 而另外 772 名不是因为患心脏病而住院的男性病人中有 175 人秃顶. 利用图形判断秃顶与患心脏病是否有关系. 能否在犯错误的概率不超过 0.010 的前提下认为秃顶与患心脏病有关系?

解: 根据题目所给数据得到如下列联表:

	患心脏病	不患心脏病	总计
秃顶			
不秃顶			
总计			

在秃顶样本中患心脏病的频率为 _____, 在

不秃顶样本中患心脏病的频率为 _____, 相应

的等高条形图如图所示: (此处略)

从条形图中可以判断: 假设秃顶与患心脏病没有关系, 计 _____ 算

$$\chi^2 = \frac{1665 \times (\frac{1}{1665} - \frac{1}{1665} \times \frac{1}{1665})^2}{\frac{1}{1665} \times \frac{1}{1665} \times \frac{1}{1665} \times \frac{1}{1665}} \approx 16.373$$

$\therefore 16.373 > \underline{\hspace{2cm}}$, 所以说明了说明了: _____.

3.2.2 统计案例习题课

【例一】(2011 山东烟台一模、江西吉安质检)下表提供了某厂节能降耗技术改造后在生产 A 产品过程中记录的产量 $x(t)$ 与相应的生产能耗 $y(t)$ 的几组对应数据:

x	3	4	5	6
y	2.5	t	4	4.5

根据上表提供的数据, 求出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.7x + 0.35$, 那么表中 t 的值为()

- A. 3 B. 3.15
C. 3.5 D. 4.5

【例二】在两个变量 y 与 x 的回归模型中, 分别选择了 4 个不同模型, 它们的相关指数 R^2 如下, 其中拟合效果最好的模型是()

- A. 模型 1 的相关指数 R^2 为 0.25
B. 模型 2 的相关指数 R^2 为 0.55
C. 模型 3 的相关指数 R^2 为 0.85
D. 模型 4 的相关指数 R^2 为 0.97

【例三】某高校“统计初步”课程的教师随机调查了选该课的一些学生, 具体数据如下表所示,

性别 \ 专业	专业	
	非统计专业	统计专业
男	13	10
女	7	20

为了判断选修统计专业是否与性别有关系, 根据表中数据, 得到 $k = \frac{50 \times (13 \times 20 - 10 \times 7)^2}{23 \times 27 \times 20 \times 30} \approx 4.844$, 因为 $4.844 > 3.841$, 所以选修统计专业与性别有关系, 那么这种判断出错的可能性为_____.

【例四】(2012 · 临沂一模)为了调查某地区老年人是否需要志愿者提供帮助, 用简单随机抽样方法从该地区调查了 200 位老年人, 结果如下:

是否需要志愿者 \ 性别	男	女
需要	70	40
不需要	30	60

附表:

$P(K^2 > k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

参照附表, 得到的正确结论是()

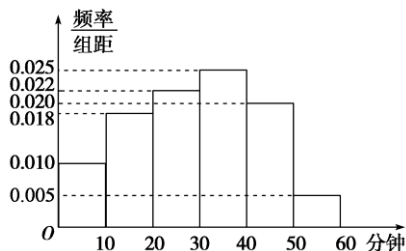
- A. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关”
B. 在犯错误的概率不超过 0.1% 的前提下, 认为“该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别无关”
C. 最多有 99% 的把握认为“该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关”
D. 最多有 99% 的把握认为“该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别无关”

【例五】在人们的休闲方式的一次调查中, 共调查了 124 人, 其中女性 70 人, 男性 54 人. 女性有 43 人主要的休闲方式是看电视, 另外 27 人主要的休闲方式是运动; 男性中有 21 人主要的休闲方式是看电视, 另外 33 人主要的休闲方式是运动.

(1) 根据以上数据建立 2×2 的列联表;

(2) 判断性别与休闲方式是否有关系, 有多大把握?

【例六】(2012·辽宁卷文)电视传媒公司为了了解某地区观众对某类体育节目的收视情况,随机抽取了100名观众进行调查,其中女性有55名.下面是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图:



将日均收看该体育节目时间不低于40分钟的观众称为“体育迷”,已知“体育迷”中有10名女性.

(1)根据已知条件完成下面的 2×2 列联表,并据此资料你是否认为“体育迷”与性别有关?

	非体育迷	体育迷	合计
男			
女			
合计			

(2)将日均收看该体育节目不低于50分钟的观众称为“超级体育迷”,已知“超级体育迷”中有2名女性,若从“超级体育迷”中任意选取2人,求至少有1名女性观众的概率.

附: $P(K^2 \geq k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

【例七】(2023·全国·高三专题练习)红铃虫是棉花的主要害虫之一,也侵害木棉、锦葵等植物.为了防治虫害,从根源上抑制害虫数量.现研究红铃虫的产卵数和温度的关系,收集到7组温度 x 和产卵数 y 的观测数据于表I中.根据绘制的散点图决定从回归模型① $y = C_1 e^{C_2 x}$ 与回归模型② $y = C_3 x^2 + C_4$ 中选择一个来进行拟合.

表I

温度 $x/^\circ\text{C}$	20	22	25	27	29	31	35
产卵数 $y/\text{个}$	7	11	21	24	65	114	325

(1)请借助表II中的数据,求出回归模型①的方程:

表II (注:表中 $t_i = \ln y_i$)

$\sum_{i=1}^7 x_i$	$\sum_{i=1}^7 y_i$	$\sum_{i=1}^7 t_i$
189	567	25.27
$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2$	$\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2$
162	78106	11.06
$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(t_i - \bar{t})$	$\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})(t_i - \bar{t})$
3040	41.86	825.09

(2)类似的,可以得到回归模型②的方程为 $y = 0.36x^2 - 202.54$,试求两种模型下温度为 20°C 时的残差;

(3)若求得回归模型①的相关指数 $R^2 = 0.95$,回归模型②的相关指数 $R^2 = 0.81$,请结合(2)说明哪个模型的拟合效果更好.

参考数据:

$$e^{-3.41} \approx 0.03, e^{0.26} \approx 1.30, e^{1.79} \approx 5.46, e^{5.20} \approx 181.88.$$

$$\text{附: 回归方程 } y = \beta x + \alpha \text{ 中 } \beta = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

$$\alpha = \bar{y} - \beta \bar{x}$$

$$\text{决定系数 } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$